

Cours d'initiation à la physique quantique

MODULE III

Mécanique Quantique et Relativité Restreinte:
Dernière étape sur la route vers
la Théorie Quantique des Champs Relativistes
et
le Modèle Standard des Interactions Fondamentales

Jan Govaerts

Center for Particle Physics and Phenomenology (CP3)
Institut de Physique Nucléaire, Université catholique de Louvain
2, Chemin du Cyclotron, B-1348 Louvain-la-Neuve, Belgique
Jan.Govaerts@fynu.ucl.ac.be

Année 2007–2008

Table des matières

1	Introduction	1
2	Particules et Champs	4
2.1	L'oscillateur harmonique	5
2.2	Particules relativistes	9
2.3	Le champ scalaire réel relativiste	11
2.4	Particules scalaires chargées	15
2.5	Particules relativistes de spin non nul	18
2.6	Particules de spin 1	22
2.7	Particules de spin 1/2	24
3	Symétries et Interactions	31
3.1	L'électrodynamique quantique	31
3.2	Dérivée covariante	34
3.3	Invariance de jauge non abélienne	36
3.4	Brisure spontanée d'une symétrie globale	40
3.5	Brisure spontanée d'une symétrie locale	45
4	Le Modèle Standard	47
4.1	Groupe de jauge et champs de matière	47
4.2	Le Lagrangien du Modèle Standard Minimal	51
4.3	Mécanisme de Higgs et bosons de jauge	52
4.4	Spectre fermionique	54
4.5	Courants neutres et chargés	57
4.6	Quelques remarques additionnelles	62

	Génération			Q
Leptons	ν_e ($< 2 \text{ eV}/c^2$)	ν_μ ($< 190 \text{ keV}/c^2$)	ν_τ ($< 18 \text{ MeV}/c^2$)	0
	e^- ($511 \text{ keV}/c^2$)	μ^- ($106 \text{ MeV}/c^2$)	τ^- ($1.78 \text{ GeV}/c^2$)	-1
Quarks	u ($\sim 5 \text{ MeV}/c^2$)	c ($\sim 1.6 \text{ GeV}/c^2$)	t ($\sim 174 \text{ GeV}/c^2$)	+2/3
	d ($\sim 10 \text{ MeV}/c^2$)	s ($\sim 150 \text{ MeV}/c^2$)	b ($\sim 4.3 \text{ GeV}/c^2$)	-1/3

Tableau 1: Les leptons et quarks, constituants fondamentaux de la matière, et les valeurs de leurs masses et de leurs charges électriques.

1 Introduction

Ces notes présentent un bref tour d’horizon du cadre conceptuel du Modèle Standard des particules élémentaires et de leurs interactions fondamentales.

Depuis l’Antiquité, la compréhension de la structure ultime de la matière a toujours été l’une des motivations fondamentales pour le physicien dans son exploration de l’univers que nous habitons. C’est avec le tableau périodique des éléments chimiques de Mendeleev et l’hypothèse atomistique, toutes deux proposées au XIX^{ème} siècle dans le contexte de la méthodologie scientifique, que nous pouvons sans doute situer les débuts d’une recherche expérimentale systématique de l’“infiniment petit”. Aujourd’hui, cette quête encore toujours aussi féconde de ses succès répétés, trouve son expression fondamentale en terme des six quarks et six leptons identifiés dans la nature. De la même manière que l’électron, le proton et le neutron étaient considérés jusqu’il y a peu comme les trois seuls constituants fondamentaux de toute la matière, aujourd’hui ce rôle est joué par trois autres types de particules, en l’occurrence l’électron e^- et les deux quarks u et d , et au travers de leurs interactions ces particules sont à la base de toute la matière qui nous entoure et dont nous sommes faits. Ce n’est qu’à plus hautes énergies que l’existence des autres quarks et leptons peut être mise en évidence.

La liste de ces particules élémentaires est dressée dans la Table 1. Dans cette Table sont également indiquées les valeurs (ou limites supérieures dans le cas des neutrinos) des masses de ces particules, possédant toutes un spin 1/2. De plus, leurs charges électriques normalisées à la charge électrique du proton sont données dans la colonne de droite.

La structure de la Table 1 indique comment ces six quarks et six leptons sont organisés en trois générations de particules possédant essentiellement des propriétés identiques, à l’exception des valeurs de leurs masses. L’existence de telles générations, et de seulement trois d’entre elles, est l’une des nombreuses questions posées par la description que nous avons aujourd’hui de ces particules et de leurs interactions. Cette description est celle du “Modèle Standard”,

c'est-à-dire le cadre conceptuel et théorique devenu le standard par rapport auquel toutes les expériences et élaborations de projets expérimentaux sont analysées. L'objet de ces notes est de présenter une brève introduction à la construction du Modèle Standard, et à quelques-unes de ses conséquences phénoménologiques les plus immédiates, de manière à en souligner tout au moins les points essentiels et fondamentalement élégants, et ainsi servir le cas échéant de point de départ à une étude en profondeur de la physique de la structure fondamentale de la matière.

De par la nature de ces notes, il n'est évidemment pas possible de donner une discussion détaillée ni des diverses conséquences phénoménologiques fondamentales du Modèle Standard, ni d'ailleurs des outils mathématiques nécessaires à la mise en place du Modèle Standard. Ainsi à titre d'illustration, seuls les quarks participent aux interactions fortes en raison de leur degré de liberté de couleur. Cette interaction est caractérisée par la propriété du confinement de ce degré de liberté, conduisant ainsi aux *mésons*—états liés d'un quark et d'un antiquark—et aux *baryons*—états liés de trois quarks. Or, ces divers états *hadroniques* s'organisent dans des représentations spécifiques des groupes de symétries approximatives de saveur, à savoir la symétrie d'isospin $SU(2)_F$ ou la symétrie $SU(3)_F$. L'existence de ces symétries approximatives est possible de par ce que les masses des quarks u , d et s sont petites en comparaison de l'échelle des interactions fortes¹, typiquement la masse des nucléons ou la masse du méson vectoriel ρ ($M_\rho = 770 \text{ MeV}/c^2$). Cependant, ces symétries approximatives de saveur sont en fait encore plus larges, sous la forme des symétries de l'algèbre des courants associées aux deux états de chiralité possibles des quarks, soit la symétrie $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_B$ dans le cas de deux saveurs de quarks de masse nulle, ou encore la symétrie $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_B$ dans le cas de trois saveurs de quarks de masses nulles. Ces symétries chirales ne sont pas explicitement réalisées dans le spectre de la théorie, mais sont dynamiquement brisées par la structure du vide—c'est-à-dire l'état d'énergie minimale—avec pour conséquences, en raison de ces symétries même approximatives, d'une part l'existence de bosons pseudo-scalaires de faible masse en comparaison à l'échelle typique des interactions fortes, à savoir les pions, les kaons et le η , et d'autre part une justification *a posteriori* de l'hypothèse de PCAC. Or, la dynamique des interactions fortes entre quarks, telle que décrite en terme du Lagrangien de la chromodynamique quantique, possède ces symétries de manière explicite, constituant ainsi l'une des nombreuses raisons pour lesquelles cette théorie fournit certainement la description correcte des interactions fortes, bien qu'il ne soit pas possible à l'heure actuelle de faire des prédictions détaillées dans le régime non perturbatif de cette théorie, excepté par simulations numériques pour quelques observables hadroniques statiques, mais certainement pas pour les collisions d'ions lourds par exemple.

Cet exemple est mentionné ici afin d'indiquer que de nombreux aspects fondamentaux du Modèle Standard ne seront pas même effleurés dans ces notes. Avant tout, l'accent est mis sur le secteur des interactions électrofaibles telles que décrites dans le cadre de ce modèle. Avec pour visée première une compréhension du mécanisme de Higgs à l'origine des masses de toutes les particules tel que le Modèle Standard en rend compte.

Jusqu'ici, nous avons rappelé quelle est la connaissance actuelle que nous avons de la structure fondamentale de la matière en terme des quarks et leptons. Il convient également de considérer les interactions fondamentales agissant entre ces diverses particules élémentaires. Aujourd'hui, toutes ces interactions, au nombre de quatre, sont comprises comme étant dues à l'échange entre les quarks et leptons de particules de spin entier, des bosons intermédiaires,

¹C'est pour cette raison que les effets de brisure explicite de la symétrie d'isospin sont moins importants que ceux de la brisure de la symétrie $SU(3)_F$, puisque la masse du quark s est plus grande que celles des quarks u et d , mais ces trois types de masses restent malgré tout nettement plus petites que l'échelle d'énergie typique des interactions fortes, à savoir essentiellement la masse du proton, $m_p \simeq 938 \text{ MeV}/c^2$. De plus, les charges électriques non nulles des quarks elles-aussi contribuent aux effets de brisure explicite des symétries de saveur.

s'avérant être en fait des bosons de jauge associés soit à une symétrie interne ou soit à une symétrie de l'espace-temps, ces symétries étant réalisées localement en chaque point de l'espace-temps et étant caractéristiques de l'interaction correspondante.

Ainsi, par ordre d'intensité décroissante, nous avons tout d'abord l'interaction forte entre quarks, décrite par la théorie de la chromodynamique quantique, c'est-à-dire la dynamique du degré de liberté de couleur. Cette interaction est engendrée par l'échange de huit types de *gluons* de spin unité, de masse nulle mais confinés, se couplant à la charge de couleur des quarks. Le groupe de symétrie associé est $SU(3)_C$, dont la théorie de jauge est renormalisable, et possède la propriété remarquable de la liberté asymptotique, c'est-à-dire que l'intensité de cette interaction décroît lorsque l'énergie transférée augmente permettant ainsi d'étudier cette théorie dans un régime perturbatif à hautes énergies. A basses énergies cependant, en raison du confinement et du régime non-perturbatif de la théorie, il devient difficile d'étudier les propriétés du spectre hadronique auquel elle conduit. Ce spectre, outre les mésons et baryons déjà mentionnés, doit également compter des états liés de quarks *et de gluons* en des mésons et baryons *hybrides* ou des *glueballs*, dont l'existence semble finalement se confirmer expérimentalement. Néanmoins, il existe des approches phénoménologiques effectives d'application à basses énergies pour les interactions fortes, constituant ainsi le domaine de la physique nucléaire, pour lesquelles des réalisations *non linéaires* des symétries chirales mentionnées plus haut permettent une évaluation précise de divers processus physiques impliquant les pions par exemple.

Ces dernières années ont également vu des tentatives d'approches non perturbatives originales apparaître, inspirées par des développements fascinants trouvant leur origine dans certaines propriétés physico-mathématiques de la théorie M des supercordes à 11 dimensions d'espace-temps, dont aucun mot ne sera évoqué ici.

L'interaction électromagnétique est décrite par la théorie de l'électrodynamique quantique dans laquelle le photon, γ , boson intermédiaire de cette interaction, couple à la charge électrique des quarks et leptons. Ce photon est de masse nulle et de spin unité, et est associé à la symétrie locale $U(1)$ de phase des champs décrivant les particules élémentaires. Les manifestations physiques de cette interaction sont nombreuses, qu'il n'est certes pas nécessaire de rappeler ici.

Ensuite, nous avons l'interaction faible qui aujourd'hui, dans le contexte du Modèle Standard, est d'une certaine manière unifiée mais non complètement à l'interaction électromagnétique. L'interaction faible est responsable, par exemple, de la désintégration β du neutron,

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \quad , \quad (1)$$

de la désintégration du muon,

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu \quad , \quad (2)$$

ou encore de la désintégration du pion chargé,

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu \quad . \quad (3)$$

Le fait que ce soit la même interaction qui est responsable de ces divers processus de désintégration est en soi déjà remarquable, et correspond à l'universalité de l'interaction faible, une propriété incluse dans la construction du Modèle Standard. Les interactions électrofaibles, outre l'interaction électromagnétique, sont dues d'une part à l'échange de bosons chargés W^\pm ayant un spin unité et une masse d'environ $80.40 \text{ GeV}/c^2$, conduisant aux courants chargés, et d'autre part à l'échange d'un boson neutre Z_0 ayant également un spin unité et une masse d'environ $91.19 \text{ GeV}/c^2$, conduisant aux courants neutres. Outre ces bosons massifs, la théorie

prédit également l'existence d'une particule scalaire neutre, le higgs physique, dont la limite expérimentale inférieure *directe* sur la masse est actuellement d'environ $114.4 \text{ GeV}/c^2$ (95% C.L.).

La symétrie locale ou symétrie de jauge associée à ces interactions électrofaibles repose sur le groupe $SU(2)_L \times U(1)_Y$, dont les bosons de jauge physiques sont donc les bosons γ , W^\pm et Z_0 . Parmi les nombreuses propriétés phénoménologiques observées et incluses dans la construction du Modèle Standard, citons la structure totalement chirale de type $(V - A)$, c'est-à-dire de chiralité gauche, des interactions à courants chargés—telle qu'observée dans les exemples de désintégrations indiquées plus hauts et correspondant à la violation complète de la parité dans les interactions faibles à courants chargés—, le phénomène de mélange des saveurs des quarks décrit par la matrice de mélange de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM) conduisant en particulier à une violation de la symétrie CP , ou encore une masse nulle des neutrinos possédant donc une hélicité gauche. En particulier, il s'avère expérimentalement que la masse des neutrinos est effectivement *non nulle*, et donc nécessairement il faut envisager des modèles plus généraux que le Modèle Standard Minimal qui lui, ne peut accommoder que des masses nulles pour tous les neutrinos. De nombreuses possibilités s'offrent d'elles-mêmes dans cette perspective.

Finalement, nous avons bien sûr encore l'interaction gravitationnelle décrite par la théorie de la relativité générale, ou une extension de cette dernière. Dans cette théorie, la géométrie de l'espace-temps elle-même possède une dynamique propre, cette dynamique étant celle d'une théorie de jauge particulière basée sur le groupe de Poincaré comme groupe de symétrie locale, avec la contrainte que la géométrie ait une torsion nulle dans le cas de la théorie de la relativité générale d'Einstein. Le boson de jauge correspondant est le graviton, de masse nulle mais de spin 2, couplant aussi bien à la masse qu'au spin des particules élémentaires. Cependant cette théorie de l'interaction gravitationnelle se distingue des théories ci-dessus décrivant les trois autres interaction fondamentales de par ce que la relativité générale—ou ses extensions—lorsque quantifiée ne soit pas renormalisable en théorie de perturbation, contrairement aux trois autres théories associées au groupe de symétrie locale $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$. La recherche d'une théorie fondamentale unifiant les quatre interactions dans un cadre conceptuel quantique nécessite certainement d'aller au-delà du Modèle Standard, ce dernier étant donc défini par une théorie de jauge quantifiée des quarks et leptons basée sur le groupe de symétrie locale $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ juxtaposée à la théorie classique—c'est-à-dire non quantifiée—de la relativité générale d'Einstein.

2 Particules et Champs

Le cadre conceptuel dans lequel sont décrites aujourd'hui les particules élémentaires et leurs interactions est celui de la théorie des champs relativistes quantifiés. Le but de cette section est de présenter les éléments de base d'une telle description, et leur signification physique. Pour ce faire, nous rappelons tout d'abord l'approche de quantification canonique de systèmes mécaniques, dans le contexte de l'oscillateur harmonique. Cette discussion est ensuite étendue au cas de champs relativistes libres, pour aboutir à la présentation de la théorie des champs relativistes appropriés à la description de particules de spin $1/2$, à savoir les champs associés aux quarks et leptons.

2.1 L'oscillateur harmonique

Désignons le seul degré de liberté de l'oscillateur harmonique à une dimension par $q(t)$, où q est donc une variable réelle et t le paramètre d'évolution temporelle de ce système. Le principe d'action minimale s'appliquant à une action locale dans le temps de la forme,

$$S[q(t)] = \int dt L(q, \dot{q}), \quad (4)$$

conduit à la dynamique de l'oscillateur harmonique, c'est-à-dire à son équation du mouvement. Dans le cas de ce système particulier, la fonction lagrangienne $L(q, \dot{q})$ est donnée par,

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 q^2, \quad (5)$$

où ($m > 0$) est la masse de l'oscillateur et ($\omega > 0$) sa fréquence angulaire. Il est bien connu que l'équation d'Euler-Lagrange associée à ce principe de moindre action est

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0. \quad (6)$$

Considérons la formulation hamiltonienne de ce système en terme des degrés de libertés (q, p) de l'espace de phase associé. Le moment p conjugué à la variable q est défini par

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m \dot{q}, \quad (7)$$

tandis que les crochets de Poisson induisant la structure de géométrie symplectique de l'espace de phase (q, p) sont donnés par²,

$$\{q, p\} = 1. \quad (8)$$

D'autre part, l'Hamiltonien canonique $H_0(q, p)$ du système est alors obtenu comme étant,

$$H_0(q, p) = \dot{q}p - L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2. \quad (9)$$

Les équations hamiltoniennes du mouvement des coordonnées canoniques de l'espace de phase sont alors données par les crochets de Poisson suivants,

$$\dot{q} = \{q, H_0\} = \frac{1}{m} p, \quad (10)$$

$$\dot{p} = \{p, H_0\} = -m \omega^2 q. \quad (11)$$

En particulier, ces deux équations conduisent à nouveau à l'équation du mouvement lagrangienne pour ce système donnée en (6). La solution générale à ces équations peut donc s'écrire sous la forme,

$$q(t) = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}} \left[a e^{-i\omega t} + a^* e^{i\omega t} \right], \quad (12)$$

$$p(t) = \frac{-im\omega}{\sqrt{2m\omega}} \left[a e^{-i\omega t} - a^* e^{i\omega t} \right], \quad (13)$$

où a est une constante d'intégration *complexe* dont les parties réelle et imaginaire sont liées à des conditions initiales telles par exemple les valeurs de $q(t)$ et $p(t)$ à un instant particulier, tandis

²Suivant l'usage établi, seuls les crochets de Poisson non nuls sont indiqués ici.

que le facteur de normalisation de la constante d'intégration a est choisie pour convenance ultérieure.

Plutôt que de spécifier la structure des crochets de Poisson sur l'espace des solutions $(q(t), p(t))$ dans l'espace de phase, il est également possible de spécifier cette structure en terme des conditions initiales définissant ces solutions de manière complète, en l'occurrence en terme de la variable a et sa variable complexe conjuguée a^* . Dans le cas présent, utilisant les expressions pour les solutions, nous avons,

$$\{a, a^*\} = -i, \quad (14)$$

étant donné la normalisation choisie pour la constante d'intégration a .

La description ci-dessus spécifie de manière complète toute l'information requise pour une étude de la dynamique classique du système de l'oscillateur harmonique. En l'occurrence, nous avons donc les degrés de liberté $q(t)$ et $p(t)$ de l'espace de phase, la structure symplectique de cet espace de phase—spécifiée en terme des crochets de Poisson—et finalement l'Hamiltonien H_0 conduisant à l'évolution temporelle du système dans l'espace de phase au travers des crochets de Poisson de cet Hamiltonien avec les degrés de liberté du système. En fait, il s'agit-là précisément de toute l'information requise également pour la formulation du système *quantifié*, sur base de l'approche de quantification canonique. En effet, l'espace des états quantiques du système est alors un espace de Hilbert, sur lequel agissent des opérateurs en correspondance avec les variables classiques du système. L'algèbre de ces opérateurs, qui *a priori* ne commutent pas nécessairement entre eux, est spécifiée par leur règles de commutations qui sont établies sur base des crochets de Poisson des variables classiques associées. A savoir, le commutateur de deux opérateurs \hat{A} et \hat{B} associés à deux variables classiques A et B est donné par l'opérateur \hat{C} associé au crochet de Poisson C des variables A et B , cet opérateur \hat{C} étant multiplié par $i\hbar$. Ainsi,

$$[\hat{A}, \hat{B}] = i\hbar \hat{C}, \quad \text{avec } \{A, B\} = C. \quad (15)$$

Evidemment, la correspondance entre variables classiques et opérateurs quantiques n'est pas univoque pour des opérateurs composés, construits à partir des degrés de liberté élémentaires du système. Ce problème est celui du choix d'ordre des opérateurs quantiques, c'est-à-dire de la définition d'un système quantique associé à un certain système classique. Bien que ce problème soit extrêmement important, nous n'en dirons pas plus ici. Cependant, remarquons que puisque l'espace des états quantiques est un espace de Hilbert, celui-ci doit être muni d'un produit interne hermitien et défini positif (dans le cas d'un espace de Hilbert). En particulier, le choix d'ordre des opérateurs doit être tel que des opérateurs associés à des variables classiques réelles soient des opérateurs hermitiens et auto-adjoints pour ce produit interne; c'est le cas par exemple de l'Hamiltonien du système.

Finalement, l'évolution temporelle du système quantifié est déterminée au travers de l'opérateur quantique \hat{H}_0 associé à l'Hamiltonien classique H_0 , à l'aide de l'équation de Schrödinger, soit,

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi, t\rangle = \hat{H}_0 |\psi, t\rangle, \quad (16)$$

où $|\psi, t\rangle$ représente à l'instant t le vecteur de l'espace de Hilbert associé à l'état quantique du système quantifié.

Ce que nous venons de décrire en quelques lignes constitue la quantification canonique d'un système dont la dynamique est basée sur le principe de moindre action. En fait, une fois quantifié de cette manière, il est possible de construire la représentation en intégrale fonctionnelle dite de Feynman du système quantique, dans laquelle apparaît à nouveau de manière naturelle l'action $S[q(t)]$ du système ainsi que la fonction de Lagrange $L(q, \dot{q})$ correspondante.

Remarquons ici que ces règles de quantification canoniques considèrent les commutateurs de paires d'opérateurs en un même instant particulier, tout comme c'est d'ailleurs le cas pour la définition des crochets de Poisson qui eux aussi sont définis à un même instant spécifique pour leurs arguments. C'est là l'une des conséquences de ce que la méthode de quantification canonique, et la formulation hamiltonienne de systèmes mécaniques, ne soient pas manifestements covariantes, de par le rôle particulier donné à la variable d'évolution temporelle t dans ce contexte. Evidemment, ce problème n'apparaît pas dans une formulation lagrangienne du système, que celui-ci soit classique ou quantique.

Dans le cas de l'oscillateur harmonique, nous avons donc ainsi deux choix possibles pour construire un système quantique associé au système classique; soit en terme des degrés de liberté de l'espace de phase $q(t)$ et $p(t)$, soit en terme des constantes d'intégration a et a^* . Dans le premier cas, les opérateurs élémentaires \hat{q} et \hat{p} sont donc hermitiens et auto-adjoints,

$$\hat{q}^\dagger = \hat{q}, \quad \hat{p}^\dagger = \hat{p}, \quad (17)$$

tandis que leurs règles de commutations sont données par,

$$\left[\hat{q}, \hat{p} \right] = i\hbar \mathbb{1} = i\mathbb{1}, \quad (18)$$

où, tout comme dans le reste de ces notes, nous choisissons de travailler dans des unités telles que ($\hbar = 1$).

Dans le second cas où ce sont les constantes d'intégration a et a^* qui sont quantifiées, nous avons alors deux opérateurs quantiques a et a^\dagger adjoints l'un de l'autre, tandis que leurs règles de commutation non nulles sont simplement,

$$\left[a, a^\dagger \right] = i\hbar(-i)\mathbb{1} = \mathbb{1}. \quad (19)$$

Dans un cas comme dans l'autre, la quantification du système procède donc par la spécification d'un espace de représentation de ces algèbres d'opérateurs, cet espace étant muni d'un produit interne hermitien défini positif approprié tel que les conditions d'hermiticité ci-dessus soient satisfaites. Cet espace de représentation fournit alors l'espace de Hilbert des états quantiques du système. Dans le premier cas, il est possible de construire un tel espace utilisant une base d'états propres de l'opérateur position \hat{q} par exemple; cette représentation correspond alors à celle de l'espace de configuration³. Ainsi, si pour toutes les valeurs réelles de la variable q les vecteurs $|q\rangle$ désignent la base des états propres de l'opérateur \hat{q} , à savoir,

$$\hat{q}|q\rangle = q|q\rangle, \quad (20)$$

nous pouvons supposer que ces vecteurs de base de l'espace des états sont "orthonormalisés",

$$\langle q|q'\rangle = \delta(q - q'), \quad (21)$$

conduisant ainsi à la décomposition spectrale de l'opérateur unité,

$$\mathbb{1} = \int_{-\infty}^{+\infty} dq |q\rangle\langle q|. \quad (22)$$

Etant donné ces propriétés, il est possible de décomposer tout vecteur $|\psi\rangle$ de l'espace des états en terme de ses composantes dans cette base, soit,

$$\langle q|\psi\rangle = \psi(q). \quad (23)$$

³De même, une représentation construite en terme d'une base d'états propres de l'opérateur moment conjugué \hat{p} conduit à la représentation de l'espace des moments.

Or, cette fonction $\psi(q)$ de la variable q obtenue ainsi est précisément la *fonction d'onde* du système dans l'espace de configuration. En particulier, les opérateurs \hat{q} et \hat{p} possèdent les représentations suivantes en terme de la fonction d'onde $\psi(q)$,

$$\langle q|\hat{q}|\psi\rangle = q\langle q|\psi\rangle, \quad \langle q|\hat{p}|\psi\rangle = -i\hbar\frac{d}{dq}\psi(q). \quad (24)$$

Par conséquent, nous retrouvons ainsi la discussion habituelle de la mécanique quantique en tant que mécanique ondulatoire. Cependant, nous voyons ici que cette mécanique ondulatoire n'est qu'une représentation parmi d'autres des structures mathématiques abstraites inhérentes à la quantification canonique de systèmes dans leur formulation canonique hamiltonienne.

Ainsi par exemple, il est également possible de déterminer la représentation du même système en terme de la représentation dans l'espace des moments. Dans ce cas, le système est représenté par une fonction d'onde $\psi(p)$ définie sur l'espace des moments, une base de l'espace des états quantiques étant alors l'ensemble des états $|p\rangle$ propres orthonormalisés de l'opérateur \hat{p} , la variable p prenant toutes les valeurs réelles possibles. Les relations de changement de base entre les espaces des configurations et des moments sont alors les suivantes,

$$\langle q|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{\frac{i}{\hbar}qp}, \quad \langle p|q\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{-\frac{i}{\hbar}qp}, \quad (25)$$

tandis que les relations entre les fonctions d'onde $\psi(q)$ et $\psi(p)$ sont alors celles des transformées de Fourier habituelles, comme par exemple,

$$\psi(p) = \langle p|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dq\langle p|q\rangle\langle q|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{+\infty} dq e^{-\frac{i}{\hbar}qp}\psi(q). \quad (26)$$

Considérons maintenant l'autre représentation possible de l'oscillateur harmonique quantifié, obtenue en terme des opérateurs a et a^\dagger . Cette représentation est celle dite de l'*espace de Fock*, et s'obtient de la manière suivante. Tout d'abord, supposons qu'il existe un état fondamental $|0\rangle$ annihilé par l'opérateur a ,

$$a|0\rangle = 0, \quad (27)$$

et normalisé à l'unité pour le produit interne hermitien,

$$\langle 0|0\rangle = 1. \quad (28)$$

Sur cet état fondamental, il est possible de construire une base dénombrable de l'espace des états, les vecteurs de cette base étant définis par

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n|0\rangle, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (29)$$

et leur normalisation étant choisie telle qu'ils soient orthonormalisés,

$$\langle n|m\rangle = \delta_{n,m}, \quad n, m = 0, 1, \dots \quad (30)$$

Ces dernières propriétés sont établies sur base des règles de commutation des opérateurs a et a^\dagger données en (19).

L'interprétation physique de la représentation de Fock est bien connue. L'opérateur a^\dagger correspond à l'opérateur de création de quanta de l'oscillateur harmonique quantifié, tandis

que l'opérateur a est l'opérateur d'annihilation de ces quanta. En particulier, l'Hamiltonien du système s'écrit,

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega (a^\dagger a + a a^\dagger) = \hbar\omega a^\dagger a + \frac{1}{2}\hbar\omega, \quad (31)$$

montrant que les quanta ainsi créés ou annihilés par les opérateurs a^\dagger et a possèdent une énergie $\hbar\omega$. En particulier, l'usage établi pour le choix du produit de ces opérateurs est celui du *produit normal*, pour lequel tous les opérateurs de création a^\dagger sont à gauche des opérateurs d'annihilation a . C'est ainsi que l'Hamiltonien quantique ci-dessus contient une contribution $\hbar\omega/2$ provenant de ce choix d'ordre normal, conduisant à une énergie non nulle de l'état fondamental $|0\rangle$ du système.

Evidemment, dans le cas de l'oscillateur harmonique considéré ici, c'est-à-dire d'un système possédant un nombre fini de degrés de liberté, les deux approches possibles à la quantification canonique de ce système conduisent au même système quantique. Cependant, ceci n'est pas nécessairement le cas pour des systèmes possédant un nombre *infini* de degrés de liberté, comme par exemple des théories de champs. Cette propriété de systèmes avec un nombre fini de degrés de liberté est illustrée par exemple dans le cas présent par le fait qu'il est possible de donner les formules de transformation de base entre la base des états propres $|q\rangle$ de l'opérateur \hat{q} et la base $|n\rangle$ de l'espace de Fock, à savoir,

$$\langle q|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{n/2} \left[q - \frac{\hbar}{m\omega} \frac{d}{dq}\right]^n \langle q|0\rangle. \quad (32)$$

Une évaluation directe de cette expressions conduit alors au résultat,

$$\langle q|n\rangle = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}q^2} H_n\left(q\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\right), \quad (33)$$

où $H_n(x)$ désigne le polynôme d'Hermite d'ordre n .

2.2 Particules relativistes

Considérons maintenant la description de particules relativistes. Dans ce cas, ces particules évoluent dans l'espace-temps de Minkowski, de coordonnées x^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) dont les composantes spatiales sont x^i ($i = 1, 2, 3$) et la composante temporelle est ($x^0 = ct$) où c est la vitesse de la lumière dans le vide. Comme toujours, nous supposons un choix d'unités telles que $c = 1$ ainsi que $\hbar = 1$ dans la suite. Finalement, la géométrie de l'espace-temps de Minkowski est déterminée par la métrique $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ dont les composantes non nulles sont les composantes diagonales et de signature $(+1, -1, -1, -1)$.

Propageant dans cet espace-temps, une particule de masse m possède une quantité de mouvement \vec{k} et une énergie $\omega(\vec{k})$ telles que,

$$\omega(\vec{k}) = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}, \quad (34)$$

tandis que ces grandeurs forment un quadrivecteur k^μ tel que,

$$k^\mu = \left(k^0, \vec{k}\right), \quad k^0 = \omega(\vec{k}). \quad (35)$$

Par analogie avec la représentation de l'oscillateur harmonique quantifié en terme de l'espace de Fock, nous souhaiterions pouvoir décrire au niveau quantique la création et l'annihilation de ces particules de quantité de mouvement \vec{k} et d'énergie $\omega(\vec{k})$ bien définies, à l'aide

d'opérateurs de création $a^\dagger(\vec{k})$ et d'annihilation $a(\vec{k})$ satisfaisant les relations de commutation,

$$\left[a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}') \right] = (2\pi)^3 2\omega(\vec{k}) \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}'), \quad (36)$$

où le choix de normalisation est fait de manière à assurer la covariance relativiste des états quantiques créés par les opérateurs $a^\dagger(\vec{k})$. La représentation en espace de Fock de cette algèbre d'opérateurs est alors obtenue utilisant un état fondamental $|0\rangle$ normé, c'est-à-dire tel que $\langle 0|0\rangle = 1$, et annihilé par les opérateurs $a(\vec{k})$,

$$a(\vec{k}) |0\rangle = 0. \quad (37)$$

Les opérateurs de création $a^\dagger(\vec{k})$ appliqués à cet état fondamental conduisent alors aux états à plusieurs particules. Ainsi par exemple, les états quantiques à une seule particule sont donnés par,

$$|\vec{k}\rangle = a^\dagger(\vec{k}) |0\rangle, \quad (38)$$

qui sont donc normalisés par les relations,

$$\langle \vec{k} | \vec{k}' \rangle = (2\pi)^3 2\omega(\vec{k}) \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}'). \quad (39)$$

Poursuivant l'analogie avec l'oscillateur harmonique quantique, et en particulier avec le développement en modes propres a et a^* (ou a^\dagger) des solutions (12) à son équation du mouvement, il est également possible ici de construire une certaine grandeur en terme des opérateurs de création et d'annihilation définis pour chaque valeur de la quantité de mouvement \vec{k} . Cependant, si ces opérateurs $a(\vec{k})$ et $a^\dagger(\vec{k})$ sont multipliés par des facteurs de phase faisant intervenir l'énergie $\omega(\vec{k})$ sous la forme $\left(e^{\mp i\omega(\vec{k})t} \right)$, en raison de la covariance relativiste sous les groupes de Poincaré et de Lorentz à imposer dans la construction, il est nécessaire de combiner ces contributions en des termes manifestement invariants de Lorentz, c'est-à-dire de la forme,

$$\omega(\vec{k})t - \vec{k} \cdot \vec{x} = g_{\mu\nu} k^\mu x^\nu = k_\mu x^\mu = k \cdot x. \quad (40)$$

Ainsi finalement, par analogie avec la solution (12) pour l'oscillateur harmonique, sommant ces divers modes propres associés aux quanta identifiés aux particules créées et annihilées dans des processus physiques pour toutes les valeurs possibles de leur quantité de mouvement \vec{k} , et choisissant une normalisation en cohérence avec celle fixée ci-dessus pour l'algèbre de Fock, nous sommes amenés à considérer la grandeur suivante,

$$\hat{\phi}(\vec{x}, t) = \int_{(\infty)} \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2\omega(\vec{k})} \left[a(\vec{k}) e^{-i[\omega(\vec{k})t - \vec{k} \cdot \vec{x}]} + a^\dagger(\vec{k}) e^{+i[\omega(\vec{k})t - \vec{k} \cdot \vec{x}]} \right]. \quad (41)$$

Cette construction suscite donc la question suivante: quelle est la théorie dont la dynamique possède ce développement en modes propres qui lorsque quantifiés, conduisent à une interprétation physique en terme de quanta identifiés à des particules relativistes de quantité de mouvement et énergie bien définies? Puisque l'opérateur quantique $\hat{\phi}(x^\mu)$ construit en (41) correspond à un champ scalaire réel défini sur l'espace-temps de Minkowski, nous sommes ainsi amenés à considérer les théories des champs relativistes sur cet espace-temps, et leur quantification canonique.

2.3 Le champ scalaire réel relativiste

Considérons donc un champ scalaire réel $\phi(x^\mu)$ défini sur l'espace-temps de Minkowski, et le principe d'action minimale pour l'action $S[\phi(x^\mu)]$ de ce système donnée par une densité lagrangienne $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi)$ locale dans l'espace-temps⁴,

$$S[\phi(x^\mu)] = \int_{(\infty)} d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi). \quad (42)$$

Remarquons également que nous supposons d'emblée que la dépendance de la densité lagrangienne $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi)$ en la dérivée temporelle ($\dot{\phi} = \partial_0\phi$) du champ scalaire se fait au travers du quadrivecteur ($\partial_\mu\phi$), une condition nécessaire à la covariance relativiste manifeste de la description de ce système.

La densité lagrangienne de ce système est construite par analogie avec le Lagrangien de l'oscillateur harmonique. D'une part, il est nécessaire que la dérivée première par rapport au temps apparaisse, mais alors ce terme doit être combiné avec des termes quadratiques dans les dérivées premières par rapport à l'espace, de manière à assurer la covariance relativiste. Par conséquent, il faut en tout cas introduire les termes suivants,

$$\left(\partial_t\phi\right)^2 - \left(\vec{\nabla}\phi\right)^2 = g_{\mu\nu}\partial^\mu\phi\partial^\nu\phi = \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi. \quad (43)$$

D'autre part, un terme quadratique dans le champ scalaire ϕ est également possible. Cependant, avec le choix d'unités tel que $\hbar = 1 = c$, les dimensions physiques de l'action et du champ scalaire ϕ sont telles que le facteur multipliant un tel terme quadratique possède la dimension d'une masse carrée. Ainsi, la densité lagrangienne considérée ici est simplement⁵,

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial^\mu\phi\partial^\nu\phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2. \quad (44)$$

Cette densité lagrangienne définit donc la dynamique de ce système. A nouveau, considérant la formulation canonique hamiltonienne, le moment conjugué $\pi(\vec{x}, t)$ au champ scalaire $\phi(\vec{x}, t)$ est défini par,

$$\pi(\vec{x}, t) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\phi(\vec{x}, t))} = \partial_t\phi(\vec{x}, t), \quad (45)$$

tandis que les crochets de Poisson définis sur cet espace de phase dont les degrés de liberté sont les quantités $(\phi(\vec{x}, t), \pi(\vec{x}, t))$ se réduisent aux relations,

$$\{\phi(\vec{x}, t), \pi(\vec{y}, t)\} = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}). \quad (46)$$

Remarquons que tout comme dans le cas de systèmes d'un nombre fini de degrés de liberté, ces crochets de Poisson sont définis en un même instant t pour leurs deux arguments. Notons également que ce champ scalaire réel constitue effectivement un système d'un nombre infini de degrés de liberté, ces derniers étant indicés par les coordonnées \vec{x} des points de l'espace. D'un certain point de vue, il est possible ainsi de considérer que dans cette théorie un oscillateur harmonique différent est attaché à chaque point de l'espace, mais que ceux-ci sont couplés les uns aux autres au travers du terme en $(\vec{\nabla}\phi)^2$ dans la densité lagrangienne en raison de la covariance relativiste exigée de cette dynamique.

⁴La localité dans l'espace-temps de l'action est nécessaire pour que les interactions entre les champs et entre les particules décrites par cette action soient elles aussi locales dans l'espace-temps.

⁵La normalisation absolue de chacun des termes étant choisie pour convenance ultérieure.

L'évolution temporelle du système est engendrée par l'Hamiltonien

$$H_0 = \int d^3x \mathcal{H}_0(\phi, \pi), \quad (47)$$

où la densité hamiltonienne $\mathcal{H}_0(\phi, \pi)$ est donnée par,

$$\mathcal{H}_0(\phi, \pi) = \partial_t \phi \pi - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2. \quad (48)$$

Les équations du mouvement hamiltoniennes de ce système sont donc,

$$\partial_t \phi = \{ \phi, H_0 \} = \pi, \quad \partial_t \pi = \{ \pi, H_0 \} = \vec{\nabla}^2 \phi - m^2 \phi, \quad (49)$$

conduisant en particulier à l'équation de Klein-Gordon pour le champ scalaire réel ϕ ,

$$\left[g_{\mu\nu} \partial^\mu \partial^\nu + m^2 \right] \phi = 0. \quad (50)$$

Cette dernière équation est également l'équation d'Euler-Lagrange obtenue à partir de la densité lagrangienne $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ en vertu du principe de variation minimale pour l'action $S[\phi(x^\mu)]$ correspondante.

Il est évidemment possible de résoudre cette équation du mouvement, dont la solution au niveau non quantifié est donnée par,

$$\phi(\vec{x}, t) = \int_{(\infty)} \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3 2\omega(\vec{k})} \left[a(\vec{k}) e^{-i[\omega(\vec{k})t - \vec{k} \cdot \vec{x}]} + a^*(\vec{k}) e^{i[\omega(\vec{k})t - \vec{k} \cdot \vec{x}]} \right], \quad (51)$$

où $a(\vec{k})$ et $a^*(\vec{k})$ sont des constantes d'intégration complexes conjuguées l'une de l'autre. En terme de celles-ci, les crochets de Poisson élémentaires deviennent,

$$\{ a(\vec{k}), a^*(\vec{k}') \} = -i (2\pi)^3 2\omega(\vec{k}) \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}'). \quad (52)$$

Poursuivant avec la quantification canonique de ce système, nous avons en terme des degrés de liberté $\phi(x^\mu)$ et $\pi(x^\mu)$ les conditions suivantes pour les opérateurs correspondants,

$$\hat{\phi}^\dagger = \hat{\phi}, \quad \hat{\pi}^\dagger = \hat{\pi}, \quad (53)$$

ainsi que les règles de commutation canoniques,

$$\left[\hat{\phi}(\vec{x}, t), \hat{\pi}(\vec{y}, t) \right] = i \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}), \quad (54)$$

où t désigne l'instant particulier auquel la quantification de la théorie est définie. En terme des constantes d'intégration $a(\vec{k})$ et de leurs complexes conjugués, nous avons pour les opérateurs associés,

$$\left(a(\vec{k}) \right)^\dagger = a^\dagger(\vec{k}), \quad \left(a^\dagger(\vec{k}) \right)^\dagger = a(\vec{k}), \quad (55)$$

tandis que leurs règles de commutation canoniques sont bien sûr,

$$\left[a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}') \right] = (2\pi)^3 2\omega(\vec{k}) \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}'). \quad (56)$$

Par conséquent, utilisant cette dernière construction du champ scalaire réel quantifié, nous retrouvons la représentation en espace de Fock de la section précédente ayant servi de motivation à notre discussion, et pour laquelle l'interprétation physique a donc déjà été donnée.

Concernant la représentation associée à la quantification du système en terme des opérateurs $\hat{\phi}$ et $\hat{\pi}$, il est possible de procéder en parfaite analogie avec la situation rencontrée pour l'oscillateur harmonique. Ainsi, la représentation en espace de configuration est construite en terme d'une base $|\phi(\vec{x})\rangle$ de l'espace des états qui soient des états propres de l'opérateur $\hat{\phi}(\vec{x}, t)$, soit,

$$\hat{\phi}(\vec{x}, t) |\phi(\vec{x})\rangle = \phi(\vec{x}) |\phi(\vec{x})\rangle, \quad (57)$$

où $\phi(\vec{x})$ désigne un champ scalaire réel défini sur l'espace. Ces états de base sont normalisés de sorte que,

$$\langle \phi | \phi' \rangle = \Pi_{\vec{x}} \delta(\phi(\vec{x}) - \phi'(\vec{x})). \quad (58)$$

Projetant le vecteur d'état $|\psi\rangle$ du système sur cette base, nous obtenons alors la représentation *fonctionnelle dans l'espace de configuration* du champ scalaire réel, à savoir,

$$\langle \phi(\vec{x}) | \psi \rangle = \Psi[\phi(\vec{x})], \quad (59)$$

pour laquelle les opérateurs $\hat{\phi}$ et $\hat{\pi}$ sont représentés par,

$$\langle \phi | \hat{\phi}(\vec{x}, t) | \psi \rangle = \phi(\vec{x}) \Psi[\phi(\vec{x})], \quad \langle \phi | \hat{\pi}(\vec{x}, t) | \psi \rangle = -i\hbar \frac{\delta}{\delta\phi(\vec{x})} \Psi[\phi]. \quad (60)$$

Evidemment, il est possible de construire également un représentation du système quantifié en terme de fonctionnelles $\Psi[\pi(\vec{x})]$ dans l'espace des moments, utilisant une base d'états propres $|\pi(\vec{x})\rangle$ des opérateurs $\hat{\pi}(\vec{x}, t)$.

Contrairement au cas de systèmes d'un nombre fini de degrés de liberté, les deux approches possibles à la quantification du champs scalaire relativiste réel présentées ici ne conduisent pas à des théories quantiques unitairement équivalentes. Seules les conséquences physiques différentes de chacune d'elles permettraient de discriminer quant à la pertinence de l'une ou de l'autre pour la description de la réalité physique des particules élémentaires. Cependant, la représentation en espace de Fock est certainement la plus appropriée lorsqu'il s'agit de développer une théorie de perturbations en théorie des champs pour des particules en interactions. En effet, la théorie construite ici décrit des particules scalaires neutres⁶ *libres* sans interactions, dont les états quantiques à N particules s'obtiennent comme,

$$N(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \dots, \vec{k}_N) a^\dagger(\vec{k}_1) a^\dagger(\vec{k}_2) \dots a^\dagger(\vec{k}_N) |0\rangle, \quad (61)$$

où $N(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \dots, \vec{k}_N)$ est un certain facteur de normalisation. En particulier, cet état est un état propre de l'opérateur de quantité de mouvement totale du système, dont la valeur propre est la somme vectorielle des quantités de mouvement individuelles \vec{k}_i ($i = 1, 2, \dots, N$) de l'ensemble des particules présentes. C'est ainsi que ces états à N particules libres peuvent servir de point de départ dans une théorie de perturbations de particules en interaction préservant leur individualité en dehors des régions de leurs interactions locales dans l'espace-temps.

Remarquons également que la quantification en espace de Fock du champ scalaire fait apparaître très clairement la dualité qui existe entre champs et particules. En effet, nous constatons que les états quantiques élémentaires d'un champ, c'est-à-dire les quanta de ce champ, peuvent être identifiés à des particules élémentaires relativistes. Ces quanta sont associés aux modes propres du champ classique, c'est-à-dire qu'ils sont associés aux coefficients ou constantes d'intégration multipliant les solutions en ondes planes des équations du champ classique. Et inversement, le champ quantifié $\hat{\phi}(\vec{x}, t)$ peut s'interpréter comme étant la superposition d'une

⁶Ce point sera explicité dans la section suivante.

collection de quanta, c'est-à-dire comme une superposition de particules relativistes. En particulier, l'application du champ quantifié $\hat{\phi}(\vec{x}, t)$ sur le vide $|0\rangle$ de la théorie conduit à une superposition en ondes planes d'états à une particule de quantité de mouvement bien définie,

$$\hat{\phi}(\vec{x}, t) |0\rangle = \int_{(\infty)} \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2\omega(\vec{k})} e^{i[\omega(\vec{k})t - \vec{k}\cdot\vec{x}]} |\vec{k}\rangle . \quad (62)$$

En d'autres mots, la quantification canonique d'un champ relativiste conduit à une parfaite dualité entre champs et particules. C'est pour cette raison que la description actuelle des particules élémentaires et de leurs interactions se fait dans le contexte de la théorie des champs relativistes quantifiés.

Habituellement, les résultats de la quantification canonique d'un champ relativiste décrits ici sont désignés comme étant ceux dits de la "seconde quantification". Cette terminologie existe pour des raisons historiques. En effet, suite à l'équation de Schrödinger énoncée pour la représentation en fonction d'onde dans l'espace de configuration d'un système non relativiste, les tentatives d'une mécanique quantique *relativiste* ont débuté avec l'équation de Klein-Gordon citée plus haut dans laquelle le champ $\phi(x^\mu)$ est interprété non pas comme un champ classique que l'on quantifie, mais plutôt comme *une fonction d'onde* pour une seule particule relativiste déjà quantifiée. Cependant, ces tentatives conduisent alors toujours à des solutions pour le système quantique ainsi obtenu d'énergie *négative*, ainsi qu'à des états quantiques de norme *négative* rendant donc problématique l'unitarité de la théorie, c'est-à-dire une interprétation probabiliste pour laquelle la probabilité est conservée. Ces solutions d'énergie négative sont associées aux solutions en onde plane dont la dépendance temporelle est de la forme $(e^{+i\omega t})$. Ce n'est que lorsqu'on quantifie "*encore une fois*"—seconde quantification!—la fonction d'onde $\phi(x^\mu)$ que l'on peut éviter ces problèmes, ce qui revient précisément à considérer $\phi(x^\mu)$ non plus comme une fonction d'onde mais comme un champ qui, lorsque quantifié, conduit à des "fonctionnelles d'onde" $\Psi[\phi(\vec{x})]$ pour lesquelles aucun de ces problèmes d'interprétation n'est plus possible, comme c'est le cas également pour les fonctions d'ondes $\psi(q)$ décrivant l'oscillateur harmonique par exemple. En particulier, remarquons que dans ce dernier contexte les solutions en onde plane possédant la phase $e^{i\omega t}$ qui pourrait être associée à des états d'énergie négative ne conduisent à aucun problème. Simplement, l'équation du mouvement du système étant du second ordre dans le temps, l'espace de ses solutions est de dimension deux, et par conséquent ses solutions en ondes planes sont complexes conjugués les unes des autres et font intervenir une constante d'intégration complexe, en l'occurrence les coefficients ou opérateurs $a(\vec{k})$ et $a^\dagger(\vec{k})$ dans le cas du champ scalaire réel.

La conclusion de la discussion de cette section est donc que de manière naturelle la description de la création et de l'annihilation de particules libres quantiques et relativistes conduit à la théorie des champs relativistes et quantifiés, ces derniers constituant donc le cadre conceptuel adéquat pour l'étude de la physique des particules élémentaires et de leurs interactions. Les quanta de ces champs sont identifiés aux particules, et sont également associés aux solutions en modes normaux des équations du mouvement des champs, tandis que les champs à leur tour peuvent s'identifier à des superpositions de particules. En particulier, un champ classique, tel par exemple un champ électrique, peut se décrire en terme d'un état *cohérent* de quanta du champ quantifié. Néanmoins, la discussion ayant mené à ces considérations a implicitement supposé que les particules sont ponctuelles, étant associées aux quanta d'un champ défini *localement* en chaque point de l'espace-temps. C'est ainsi qu'il est possible de formuler certaines théories quantiques bien spécifiques dont les objets élémentaires ne sont plus des objets ponctuels mais plutôt *un seul même objet élémentaire étendu possédant une seule dimension*, dont le spectre physique des modes propres de vibration contient des états quantiques pouvant néanmoins

également s'identifier à des particules élémentaires. Ces théories correspondent aux théories dites des "supercordes". Cependant, dans la limite des basses énergies, ces théories peuvent à nouveau se décrire de manière effective en terme de théories des champs associées aux diverses particules apparaissant dans le spectre de ces théories d'un seul type d'objet élémentaire.

Jusqu'à présent, nous avons considéré un champ scalaire réel, dont les quanta correspondent donc à des particules de spin et de charge électrique nuls. Comment est-il possible en théorie des champs de décrire ces attributs additionnels des particules élémentaires, lorsque non nuls?

2.4 Particules scalaires chargées

Dans le but de décrire des particules possédant une charge électrique, ou tout autre type de charge correspondant à un nombre quantique additif conservé, considérons deux champs scalaires réels libres $\phi_1(x^\mu)$ et $\phi_2(x^\mu)$ distincts *mais de même masse* m . La densité lagrangienne \mathcal{L} de ce système est donc simplement déterminée par la somme des densités lagrangiennes de chacun de ces champs scalaires, à savoir,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \phi_1 \right)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi_1^2 + \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \phi_2 \right)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi_2^2. \quad (63)$$

Associés à ces deux champs scalaires réels ϕ_1 et ϕ_2 , nous avons donc au niveau quantique⁷ les opérateurs de création et d'annihilation $a_1^\dagger(\vec{k})$, $a_2^\dagger(\vec{k})$ et $a_1(\vec{k})$, $a_2(\vec{k})$, respectivement.

Cependant, en raison de la masse identique de ces deux types de particules, il est indiqué de combiner les deux champs réels en un seul champ scalaire *complexe* dont les champs ϕ_1 et ϕ_2 sont les parties réelle et imaginaire, respectivement. Par conséquent, définissons le champ scalaire complexe $\phi(x^\mu)$,

$$\phi(x^\mu) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\phi_1(x^\mu) + i \phi_2(x^\mu) \right], \quad (64)$$

où le facteur $1/\sqrt{2}$ est choisi pour fin de normalisation du champ $\phi(x^\mu)$ ainsi construit.

En terme de ce champ scalaire complexe, la densité lagrangienne du système prend maintenant la forme plus simple,

$$\mathcal{L} = |\partial_\mu \phi|^2 - m^2 |\phi|^2, \quad (65)$$

en terme des *normes* des champs scalaire et vectoriel complexes ϕ et $\partial_\mu \phi$.

Les solutions à l'équation du mouvement du champ ϕ sont immédiatement construites, utilisant celles pour les champs scalaires réels ϕ_1 et ϕ_2 et la définition (64). Nous avons ainsi,

$$\phi(x^\mu) = \int_{(\infty)} \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3 2\omega(\vec{k})} \left[e^{-ik \cdot x} a(\vec{k}) + e^{ik \cdot x} b^\dagger(\vec{k}) \right], \quad (66)$$

où il est entendu que dans les facteurs de phase en ondes planes le produit invariant $(k \cdot x)$ est donnée par,

$$k \cdot x = k^0 x^0 - \vec{k} \cdot \vec{x}, \quad k^0 = \omega(\vec{k}) = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}. \quad (67)$$

Les opérateurs $a(\vec{k})$ et $b(\vec{k})$ et leurs opérateurs adjoints $a^\dagger(\vec{k})$ et $b^\dagger(\vec{k})$ sont définis par,

$$a(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[a_1(\vec{k}) + i a_2(\vec{k}) \right], \quad a^\dagger(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[a_1^\dagger(\vec{k}) - i a_2^\dagger(\vec{k}) \right], \quad (68)$$

⁷A partir de maintenant, ayant compris la relation existant entre les modes des solutions au système classique et l'interprétation de ces modes en terme de particules relativistes dans le système quantifié, nous prenons la liberté de passer de l'une à l'autre de ces formulations sans être explicite. En particulier, l'indication d'opérateurs par le symbole " $\hat{}$ " sera ignorée.

ainsi que

$$b(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[a_1(\vec{k}) - i a_2(\vec{k}) \right], \quad b^\dagger(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[a_1^\dagger(\vec{k}) + i a_2^\dagger(\vec{k}) \right]. \quad (69)$$

Il est immédiat de vérifier que ces opérateurs obéissent les règles de commutation suivantes⁸,

$$\left[a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}') \right] = (2\pi)^3 2\omega(\vec{k}) \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') = \left[b(\vec{k}), b^\dagger(\vec{k}') \right]. \quad (70)$$

Par conséquent, l'interprétation physique de ces opérateurs est la suivante. Les opérateurs $a(\vec{k})$ et $a^\dagger(\vec{k})$ sont les opérateurs d'annihilation et de création, respectivement, de *particules* associées au champ scalaire complexe ϕ , tandis que les opérateurs $b(\vec{k})$ et $b^\dagger(\vec{k})$ sont les opérateurs d'annihilation et de création d'*antiparticules* associées au même champ complexe ϕ . En effet, agissant sur le vide $|0\rangle$ ou un état excité de l'espace de Fock, en raison de ces règles de commutation le champ $\phi(\vec{x}, t)$ soit annihile un mode de type particule associé aux opérateurs $a(\vec{k})$ et $a^\dagger(\vec{k})$, soit crée un mode de type antiparticule associé aux opérateurs $b(\vec{k})$ et $b^\dagger(\vec{k})$. Remarquons que ces particules et antiparticules possèdent exactement la *même* masse m .

Une raison additionnelle justifiant cette interprétation en terme de particules et d'antiparticules apparaît lorsqu'il est fait usage des symétries que possède ce système. Par construction, une classe de symétries du champ scalaire complexe ϕ et de sa dynamique est celle des symétries de l'espace-temps de Minkowski, à savoir le groupe de Poincaré comprenant aussi bien les translations dans l'espace-temps que les transformations de Lorentz préservant la métrique de Minkowski de l'espace-temps. Cependant, en raison de la masse m identique des deux champs scalaires réels ϕ_1 et ϕ_2 , la dynamique du champ complexe libre ϕ possède également une symétrie *interne*—c'est-à-dire n'agissant pas sur la dépendance spatio-temporelle du champ—associée à la phase de ce champ, ou encore aux rotations continues entre les champs ϕ_1 et ϕ_2 . Le groupe de symétrie correspondant est évidemment le groupe abélien—ou commutatif—dénomé $SO(2)$ équivalent au groupe abélien $U(1)$ agissant sur la phase du champ ϕ ,

$$\phi(x^\mu) \rightarrow \phi'(x^\mu) = e^{i\alpha} \phi(x^\mu). \quad (71)$$

Une telle symétrie interne est dite *globale* puisque le changement de phase ($e^{i\alpha}$) est identique en tous les points de l'espace-temps, le paramètre α étant constant.

Or, en vertu du (premier) théorème de Noether, associés à ces symétries continues doivent exister autant de courants et charges conservés⁹ qu'il y a de paramètres indépendants pour ces groupes de symétries continues de cette théorie d'un champ scalaire complexe. En particulier, les charges conservées sont déterminées par l'intégrale spatiale de la composante *temporelle* du courant conservé correspondant. De plus, soit dans la formulation hamiltonienne, soit dans la formulation de quantification canonique, ces charges conservées—et les courants associés—possèdent une algèbre de crochets de Poisson ou de règles de commutation qui est celle de l'algèbre du groupe de symétrie correspondant, et dont ces charges conservées sont donc aussi les générateurs lorsqu'agissant sur les degrés de liberté du système.

Ainsi, associée à la symétrie sous les translations dans l'espace-temps, la charge conservée correspondante prend la forme,

$$P^\mu = \int_{(\infty)} d^3\vec{x} T^{0\mu}, \quad (72)$$

⁸A nouveau, seules les relations de commutation *non nulles* sont données explicitement.

⁹La conservation de ces quantités s'applique aussi bien pour les solutions aux équations classiques ou quantiques du mouvement, sauf dans le cas d'anomalies quantiques.

où $T^{\mu\nu}$ est le tenseur d'énergie-moment de la théorie. L'interprétation physique de la grandeur P^μ est celle de l'énergie-quantité de mouvement totale du système. De même, associée à l'invariance sous les transformations de Lorentz de l'espace-temps, la charge conservée correspondante,

$$M^{\mu\nu} = \int_{(\infty)} d^3\vec{x} \left[T^{0\mu} x^\nu - T^{0\nu} x^\mu \right], \quad (73)$$

représente le *moment angulaire généralisé total* du système. De plus, ces quantités engendrent l'algèbre du groupe de Poincaré, en l'occurrence au niveau quantique,

$$\left[P^\mu, P^\nu \right] = 0, \quad \left[M^{\mu\nu}, P^\rho \right] = -i \left[g^{\mu\rho} P^\nu - g^{\nu\rho} P^\mu \right], \quad (74)$$

$$\left[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma} \right] = -i \left[g^{\mu\rho} M^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} M^{\nu\rho} - g^{\nu\rho} M^{\mu\sigma} + g^{\nu\sigma} M^{\mu\rho} \right]. \quad (75)$$

Considérons maintenant plus spécifiquement les courant et charge conservés associés à la symétrie interne de phase $U(1)$ du champ complexe ϕ . Dans ce cas, il est possible de montrer¹⁰ que le courant conservé correspondant est simplement donné par,

$$J_\mu = i \left[\phi^\dagger \partial_\mu \phi - \partial_\mu \phi^\dagger \phi \right] = i \phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi. \quad (76)$$

En effet, un calcul explicite conduit à,

$$\partial^\mu J_\mu = i \left[\phi^\dagger \partial^\mu \partial_\mu \phi - \partial^\mu \partial_\mu \phi^\dagger \phi \right], \quad (77)$$

expression qui s'annule identiquement lorsque le champ ϕ satisfait son équation du mouvement, à savoir l'équation de Klein-Gordon,

$$\left(\partial^\mu \partial_\mu + m^2 \right) \phi = 0. \quad (78)$$

La charge conservée associée à cette symétrie de phase est donc déterminée par,

$$Q = \int_{(\infty)} d^3\vec{x} J^0, \quad (79)$$

où J^0 est la composante temporelle du courant conservé J^μ . A nouveau, la conservation de cette charge est satisfaite pour des solutions aux équations du mouvement, puisque nous avons alors,

$$\frac{d}{dt} Q = \int_{(\infty)} d^3\vec{x} \partial_0 J^0 = \int_{(\infty)} d^3\vec{x} \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0, \quad (80)$$

où dans la seconde de ces égalités il est fait usage de la loi de conservation du courant J^μ , et dans la troisième de ces égalités la condition au bord que le champ ainsi que ses dérivées d'ordre arbitraire s'annulent toutes à l'infini.

Dans le cas particulier du champ scalaire complexe ϕ , il est possible d'obtenir des expressions explicites pour les énergie-quantité de mouvement P^μ et charge Q du système en terme des opérateurs associés aux quanta de ce champ. Ainsi, nous avons d'une part,

$$P^\mu = \int_{(\infty)} \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2\omega(\vec{k})} k^\mu \left[a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k}) + b^\dagger(\vec{k}) b(\vec{k}) \right], \quad (81)$$

¹⁰Pour ce faire, la méthode la plus immédiate consiste à calculer la variation de l'action $S[\phi(x^\mu)]$ du système pour une transformation de symétrie où le paramètre de phase α est *local* dans l'espace-temps, c'est-à-dire $\alpha(x^\mu)$, et d'utiliser le résultat du théorème de Noether assurant l'existence d'un courant conservé lorsque le paramètre α est constant.

où bien sûr ($k^0 = \omega(\vec{k})$), et d'autre part,

$$Q = \int_{(\infty)} \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2\omega(\vec{k})} \left[a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) - b^\dagger(\vec{k})b(\vec{k}) \right]. \quad (82)$$

En particulier, il est alors possible d'obtenir les règles de commutation suivantes,

$$\left[P^\mu, a^\dagger(\vec{k}) \right] = k^\mu a^\dagger(\vec{k}), \quad \left[P^\mu, b^\dagger(\vec{k}) \right] = k^\mu b^\dagger(\vec{k}), \quad (83)$$

ainsi que

$$\left[Q, a^\dagger(\vec{k}) \right] = +a^\dagger(\vec{k}), \quad \left[Q, b^\dagger(\vec{k}) \right] = -b^\dagger(\vec{k}). \quad (84)$$

Par conséquent, ces résultats confirment l'interprétation donnée aux états quantiques obtenus à l'aide des opérateurs de création $a^\dagger(\vec{k})$ et $b^\dagger(\vec{k})$ en terme de particules et antiparticules chargées et d'énergie et quantité de mouvement bien définies. En effet, les états créés par $a^\dagger(\vec{k})$ aussi bien que par $b^\dagger(\vec{k})$ possèdent comme valeur propre de leur énergie-quantité de mouvement le quadrivecteur k^μ , puisque nous avons par exemple,

$$P^\mu a^\dagger(\vec{k}) |0\rangle = k^\mu a^\dagger(\vec{k}) |0\rangle, \quad P^\mu b^\dagger(\vec{k}) |0\rangle = k^\mu b^\dagger(\vec{k}) |0\rangle. \quad (85)$$

D'autre part, ces mêmes états possèdent des charges opposées sous l'action du générateur Q des transformations de phase du champ complexe ϕ , puisque nous avons par exemple,

$$Q a^\dagger(\vec{k}) |0\rangle = +a^\dagger(\vec{k}) |0\rangle, \quad Q b^\dagger(\vec{k}) |0\rangle = -b^\dagger(\vec{k}) |0\rangle. \quad (86)$$

Or, il est clair que ce nombre quantique associé aux états du système est un nombre quantique *additif*, en raison des règles de commutations entre l'opérateur Q et les opérateurs de création et d'annihilation des quanta du champ complexe ϕ . Remarquons que cette conclusion est également cohérente avec l'interprétation en terme de particules et antiparticules des états créés par les opérateurs $a^\dagger(\vec{k})$ et $b^\dagger(\vec{k})$, ces opérateurs portant une charge Q *opposée*. Ainsi, associé à la symétrie de phase $U(1)$ du champ complexe ϕ , il existe un nombre quantique conservé additif prenant des valeurs entières positives et négatives pour des collections de particules et antiparticules, respectivement.

En conclusion, jusqu'ici nous avons donc établi d'une part que la description en terme de champs relativistes quantifiés de particules de spin nul nécessite des champs scalaires, et d'autre part que la description de particules "neutres" ou "chargées"—c'est-à-dire possédant un nombre quantique additif conservé—requiert des champs réels ou complexes, respectivement, l'existence d'une telle charge étant liée à l'invariance sous les transformations de phase de champs complexes, ces transformations formant le groupe $U(1)$.

2.5 Particules relativistes de spin non nul

Ayant compris comment la description de charges conservées additives—telle par exemple la charge électrique—est possible en théorie des champs, considérons maintenant le problème du spin de particules relativistes. La notion de spin est associée à l'invariance d'un système sous les rotations dans l'espace. Ainsi dans le cas de la mécanique quantique *non relativiste*, le spin d'un système est caractérisé par une représentation unitaire du groupe des rotations à trois dimensions $SO(3)$ qui, du point de vue de sa structure algébrique, est assimilable au groupe $SU(2)$, les représentations de ce dernier étant désignées par un nombre j entier ou demi-entier correspondant au spin j du système. En effet, l'action d'une rotation agissant sur le système

dans l'espace physique se représente dans l'espace (de Hilbert) des états quantiques associé à ce système en terme d'une transformation linéaire dans cet espace d'états, permettant de relier entre eux un ensemble de ces états qui tous représentent en quelque sorte un même état quantique du système, la seule différence étant que ces divers états s'obtiennent les uns des autres au travers de rotations dans l'espace. En d'autres mots, une telle collection d'états quantiques s'organise en une représentation (linéaire) de l'algèbre¹¹ ($so(3) \simeq su(2)$) du groupe des rotations $SO(3)$ à trois dimensions.

Mais puisque la notion de spin est liée aux rotations de l'espace, comment est-il possible d'étendre cette notion dans le contexte de la relativité restreinte pour lequel espace et temps sont des concepts relatifs aux observateurs et seul l'espace-temps—dont le groupe d'invariance est le groupe de Poincaré—possède une signification intrinsèque? Dans ce cas, la notion de spin ne peut se définir que par rapport à un référentiel inertiel particulier et distingué, en l'occurrence celui lié au système. Ainsi dans le cas de particules relativistes de masse *non nulle*, il est toujours possible à l'aide d'une transformation de Lorentz appropriée, de se ramener au référentiel au repos de la particule, et de considérer les rotations dans l'espace à trois dimensions tel que “vu” dans ce référentiel de la particule. De cette manière, la discussion se ramène à celle rappelée ci-dessus d'application dans la mécanique quantique non relativiste, permettant de caractériser le spin de toute particule *de masse non nulle* en terme d'un nombre j entier ou demi-entier. Ce nombre détermine la représentation du groupe des rotations spatiales dans le référentiel au repos de la particule, ce groupe étant évidemment un sous-groupe du groupe de Lorentz. Or ce sous-groupe est précisément également le sous-groupe du groupe de Lorentz laissant *invariant* le quadrivecteur énergie-quantité de mouvement de la particule dans son référentiel au repos. Ainsi, il est possible considérer une construction semblable dans le cas de particules de *masse nulle*, pour lesquelles il n'existe pas de référentiel au repos. En effet, dans ce cas il suffit de considérer le sous-groupe du groupe de Lorentz laissant invariant le quadrivecteur énergie-quantité de mouvement k^μ —de type lumière maintenant, c'est-à-dire tel que ($k^2 = k^\mu \cdot k_\mu = 0$). Dans le cas de quatre dimensions d'espace-temps, ce sous-groupe est en fait le groupe euclidien $E(2)$ possédant le sous-groupe $SO(2)$ des rotations des deux directions de l'espace transverses à la quantité de mouvement \vec{k} de la particule de masse nulle. Dans ce cas, on obtient des représentations de l'algèbre du groupe ($SO(2) \simeq U(1)$), correspondant à l'*hélicité* de la particule de masse nulle.

En conclusion, dans le cadre de la relativité restreinte, aussi bien pour des particules de masse nulle que de masse non nulle, le “spin” est caractérisé par les représentations d'un groupe de rotation, ce groupe étant la composante compacte du sous-groupe¹² du groupe de Lorentz $SO(3,1)$ laissant invariant le quadrivecteur énergie-quantité de mouvement de la particule. Dans le cas de particules de masse nulle, ce sous-groupe de rotation est isomorphe au groupe

¹¹La raison pour laquelle on obtient une représentation de l'algèbre du groupe et non du groupe lui-même, est que l'espace des états s'organise en fait en terme de représentations des *générateurs* du groupe, ces générateurs étant construits au travers des degrés de liberté du système tandis que leurs règles de commutation sont celles de l'algèbre du groupe de symétrie dont ils sont les charges conservées. Les représentations ainsi obtenues sont alors celles du *groupe de recouvrement universel* du groupe initial. Ainsi dans le cas du groupe des rotations $SO(3)$ qui est doublement connexe, le groupe de recouvrement universel est le groupe $SU(2)$ dont les représentations sont caractérisées par les nombres entiers et demi-entiers. Les représentations de spin entier sont en fait des représentations de $SO(3)$ correspondant aux représentations vectorielle et tensorielles, tandis que celles de spin demi-entier sont les représentations spinorielles de $SU(2)$ qui ne sont pas des représentations univaluées du groupe $SO(3)$ puisque pour de telles représentations la rotation d'angle 2π par rapport à un axe quelconque dans l'espace est représentée par la matrice (-1) . En d'autres mots, en terme de groupes nous avons l'identification ($SO(3) \simeq SU(2)/Z_2$), le groupe Z_2 étant le centre de $SU(2)$.

¹²Ce sous-groupe porte le nom de “petit groupe (de Wigner) de la particule”.

$SO(2)$, conduisant à l'hélicité entière ou demi-entière de la particule de masse nulle, tandis que pour une particule de masse non nulle, ce sous-groupe est isomorphe au groupe $SO(3)$ conduisant à nouveau à la notion de spin entier ou demi-entier d'une particule relativiste massive.

Cette discussion précise donc la signification du concept de spin ou d'hélicité en relativité restreinte, en ce qui concerne des particules relativistes. Lorsque ces particules correspondent aux quanta de champs relativistes, comment faut-il choisir ces champs de manière à obtenir une représentation de spin particulier pour les quanta de ce champ? Par construction, de telles théories de champs doivent être invariantes sous le groupe de Poincaré, et comme nous venons de le voir le groupe de Lorentz joue le rôle essentiel dans la formulation du spin. Par conséquent, de manière à assurer la covariance et l'invariance relativiste de théories de champs décrivant des particules de spin non nul, il suffit de considérer les représentations du groupe de Lorentz $SO(3,1)$ et de choisir des champs se transformant sous de telles transformations¹³, le contenu en spin des quanta associés à ces représentations étant alors déterminé de la manière indiquée ci-dessus. Ainsi par exemple, jusqu'à présent nous avons vu comment un champ scalaire permet la description de particules de spin nul. Or, un champ scalaire est précisément la représentation triviale du groupe de Lorentz.

Ainsi, la construction de théories de champs invariantes relativistes de spin non nul nécessite une discussion des représentations du groupe de Lorentz à quatre dimensions d'espace-temps. Remarquons que puisque le groupe de Lorentz $SO(3,1)$ est un groupe non compact, aucune de ses représentations de dimension finie ne peut être *unitaire*, contrairement au cas de $SO(3)$ ou de $SU(2)$ par exemple, qui sont des groupes compacts. Cependant, cette situation ne pose aucun problème car les représentations dont il est question ici ne servent qu'à la spécification des champs utilisés, *mais non des espaces des états quantiques de la théorie*. En effet, il est fondamental pour l'unitarité d'une théorie quantifiée que son espace d'états quantiques fournisse une représentation *unitaire* de groupes de symétrie, de manière à assurer la conservation des probabilités. Mais il n'en est pas ainsi pour les degrés de liberté des systèmes, en l'occurrence les champs relativistes quantifiés. Ainsi, c'est l'espace des états quantiques de telles théories des champs, obtenus dans la représentation par espace de Fock comme des superpositions de particules et d'antiparticules, qui doit fournir des espaces de représentations *unitaires* des symétries telles le groupe de Poincaré $ISO(3,1)$ ou le groupe des rotations $SO(3)$. Or, ces espaces de représentations sont de dimensions *infinies* comme il se doit pour des groupes non compacts tels les groupes de Poincaré ou de Lorentz. Dans ces notes, nous ne pouvons développer ces questions plus avant, mais signalons seulement ici que les constructions présentées dans la suite conduisent effectivement à des théories quantiques unitaires, c'est-à-dire conservant la probabilité.

Le développement de la théorie des représentations du groupe de Lorentz $SO(3,1)$ à quatre dimensions débute nécessairement avec l'algèbre de ce groupe, à savoir les relations de commutation déjà mentionnées en (75),

$$\left[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma} \right] = -i \left[g^{\mu\rho} M^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} M^{\nu\rho} - g^{\nu\rho} M^{\mu\sigma} + g^{\nu\sigma} M^{\mu\rho} \right]. \quad (87)$$

De manière à faire apparaître la structure *spécifique à quatre dimensions* de cette algèbre, il est utile de distinguer les composantes spatiales et temporelles des générateurs $M^{\mu\nu}$, et de considérer les opérateurs suivants définissant une nouvelle base de leur algèbre,

$$L_+^i = \frac{1}{2} \left[L^i + i K^i \right], \quad L_-^i = \frac{1}{2} \left[L^i - i K^i \right], \quad (88)$$

¹³Habituellement, les champs ne se transforment pas sous les *translations* dans l'espace-temps, auquel cas le choix d'une représentation du groupe de Lorentz induit également le choix d'une représentation du groupe de Poincaré telle que les translations dans l'espace-temps soient représentées par l'opérateur identité.

tels que

$$(L_+^i)^\dagger = L_+^i, \quad (L_-^i)^\dagger = L_-^i, \quad (89)$$

où les générateurs K^i et L^i ($i = 1, 2, 3$) sont donnés par les relations,

$$K^i = M^{0i}, \quad L^i = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} M^{jk}, \quad M^{ij} = \epsilon^{ijk} L^k, \quad (90)$$

et possèdent les propriétés suivantes,

$$(K^i)^\dagger = -K^i, \quad (L^i)^\dagger = L^i. \quad (91)$$

Ici, les indices ($i, j, k = 1, 2, 3$) dénotent les composantes spatiales, tandis que ϵ^{ijk} est le tenseur totalement antisymétrique tel que ($\epsilon^{123} = +1$). Remarquons que les générateurs K^i correspondent aux “boosts” de Lorentz—translations à vitesse constante—, et les générateurs L^i aux rotations spatiales autour de l’axe de direction i . Les générateurs L_\pm^i déterminent donc des transformations de Lorentz particulières combinant un “boost” de Lorentz dans la direction i et une rotation autour de cette direction, avec une chiralité soit négative ou gauche pour L_-^i , soit positive ou droite pour L_+^i .

Sur base de l’algèbre en (87), il est immédiat de montrer que les six générateurs L_\pm^i ($i = 1, 2, 3$) possèdent les règles de commutation suivantes,

$$\left[L_+^i, L_+^j \right] = i \epsilon^{ijk} L_+^k, \quad \left[L_-^i, L_-^j \right] = i \epsilon^{ijk} L_-^k, \quad (92)$$

$$\left[L_+^i, L_-^j \right] = 0. \quad (93)$$

En d’autres mots, les générateurs L_\pm^i ($i = 1, 2, 3$) engendrent une algèbre isomorphe à celle du groupe $SU(2)_L \times SU(2)_R$. Par conséquent, les représentations du groupe de Lorentz à quatre dimensions¹⁴ $SO(3, 1)$ sont spécifiées en terme d’une paire (j_L, j_R) de nombres entiers ou demi-entiers caractérisant les représentations du groupe $SU(2)$, chacun de ces nombres étant associé à l’un des facteurs $SU(2)$ dans l’équivalence algébrique¹⁵ sur les nombres complexes ($so(3, 1) \simeq su(2)_L \oplus su(2)_R$). L’existence de ces facteurs correspond à la notion de *chiralité* à quatre dimensions, le facteur $SU(2)_L$ engendré par L_-^i ($i = 1, 2, 3$) étant associé à la chiralité *gauche*, et le facteur $SU(2)_R$ engendré par L_+^i ($i = 1, 2, 3$) à la chiralité *droite*.

Cette discussion caractérise donc les représentations irréductibles de dimension finie du groupe (de recouvrement universel de) $SO(3, 1)$. La représentation (j_L, j_R) est de dimension $(j_L + 1)(j_R + 1)$, c’est-à-dire le produit des dimensions des représentations de $SU(2)$ correspondantes. De plus, le contenu en spin d’une telle représentation se détermine immédiatement, puisque les générateurs des rotations spatiales L^i ($i = 1, 2, 3$) sont simplement donnés par ($L^i = L_+^i + L_-^i$) ($i = 1, 2, 3$). En d’autres mots, il suffit d’effectuer la contraction des deux groupes $SU(2)_L$ et $SU(2)_R$ pour déterminer les représentations du groupe $SU(2)$ engendré par L^i ($i = 1, 2, 3$) associé aux rotations dans l’espace. Ainsi, le contenu en spin de la représentation (j_L, j_R) est donné par les règles habituelles de réduction de produits tensoriels des représentations de $SU(2)$ de spin j_L et j_R , soit,

$$j = j_L + j_R, j_L + j_R - 1, \dots, |j_L - j_R| + 1, |j_L - j_R|. \quad (94)$$

¹⁴Le symbole ϵ^{ijk} utilisé dans cette construction n’existe que pour trois dimensions d’espace.

¹⁵Au niveau des groupes, le groupe de recouvrement universel du groupe de Lorentz à quatre dimensions $SO(3, 1)$ est une version complexifiée du groupe $SU(2)_L \times SU(2)_R$, plus précisément celle isomorphe au groupe $SL(2, \mathbb{C})$. Ces distinctions ne peuvent être explicitées ici.

Finalement, remarquons que sous les transformations de l'espace-temps changeant l'orientation de l'espace, c'est-à-dire les transformations de parité P , puisque les opérateurs K^i ($i = 1, 2, 3$) changent de signe mais non les opérateurs L^i ($i = 1, 2, 3$), les générateurs L^i_+ et L^i_- ($i = 1, 2, 3$) sont échangés les uns avec les autres, conduisant aux transformations suivantes sous parité des représentations du groupe de Lorentz,

$$P : (j_L, j_R) \longrightarrow (j_R, j_L). \quad (95)$$

A l'aide de ces résultats, il devient immédiat de déterminer les champs à utiliser pour la description de particules de spin spécifique. Commencant avec le cas le plus simple, la représentation $((j_L, j_R) = (0, 0))$ a un contenu en spin ($j = 0$), et par conséquent la description la plus simple de particules de spin nul se fait à l'aide de champs scalaires, comme nous l'avons déjà établi.

Considérons maintenant les deux premières représentations non triviales, soit $(1/2, 0)$ ou $(0, 1/2)$. Le contenu en spin de chacune d'elles est ($j = 1/2$), mais elles se distinguent de par leur chiralité, gauche pour la première et droite pour la seconde. Prise chacune individuellement, ces représentations peuvent donc servir à la description de particules de spin $1/2$ lorsque massives, ou d'hélicité ($\mp 1/2$) lorsque de masse nulle, et correspondent aux spineurs de Weyl de chiralité gauche ou droite, respectivement. Cependant, aucune de ces représentations n'est invariante sous parité, étant échangées l'une avec l'autre sous les transformations de parité P . La description de particules de spin $1/2$ (ou d'hélicité ($\pm 1/2$)) invariantes sous parité nécessite donc de considérer la somme directe de ces deux représentations,

$$(1/2, 0) \oplus (0, 1/2), \quad (96)$$

cet espace fournissant donc une représentation du groupe de Lorentz *invariante sous parité*. Ce choix correspond au spineur de Dirac, dont les propriétés sont détaillées plus loin.

La représentation suivante que l'on peut considérer est $((j_L, j_R) = (1/2, 1/2))$, correspondant¹⁶ à un champ vectoriel $A_\mu(x^\mu)$, dont le contenu en spin est ($j = 1$) et ($j = 0$). La composante de spin nul peut être éliminée par une condition invariante de Lorentz sur ce champ, à savoir la condition de Lorentz ($\partial^\mu A_\mu = 0$). Un champ vectoriel satisfaisant cette dernière condition décrit donc des particules de spin unité ou d'hélicité (± 1). Comme nous le verrons, c'est le cas par exemple du champ associé au photon, à savoir le champ de jauge de l'électromagnétisme.

Finalement, considérons les représentations $((j_L, j_R) = (1, 0))$ et $((j_L, j_R) = (0, 1))$, qui elles aussi ne sont donc pas invariantes sous parité. Leur contenu en spin est ($j = 1$), et un exemple de champ se transformant sous la représentation $(1, 0) \oplus (0, 1)$ est celui du tenseur électromagnétique

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (97)$$

correspondant donc aux champs électrique et magnétique (\vec{E}, \vec{B}) de parités opposées.

2.6 Particules de spin 1

Le choix le plus simple de représentation du groupe de Lorentz permettant la description de particules de spin unité est donc $(1/2, 1/2)$, correspondant à un champ vectoriel $A_\mu(x^\mu)$. Dans le

¹⁶Le contenu en spin d'un quadrivecteur v^μ est effectivement ($j = 1$) et ($j = 0$), ce qui ne peut que correspondre à la représentation $(1/2, 1/2)$ du groupe de Lorentz. Bien sûr, il est possible—mais nous ne le ferons pas ici—de spécifier cette équivalence en terme des matrices $(\sigma^\mu = (1, \vec{\sigma}))$ — $\vec{\sigma}$ étant les matrices de Pauli—et de la quantité $(v_\mu \sigma^\mu)$ qui se transforme précisément selon la représentation $(1/2, 1/2)$.

cas d'un champ vectoriel réel (resp. complexe), les quanta associés décrivent donc des particules neutres (resp. chargées). Ici, nous ne considérons que le cas d'un champ réel, pour lequel le développement en modes normaux d'ondes planes prend donc la forme,

$$A_\mu(x) = \int_{(\infty)} \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2\omega(\vec{k})} \sum_\lambda \left[e^{-ik \cdot x} \epsilon_\mu(\vec{k}, \lambda) a(\vec{k}, \lambda) + e^{ik \cdot x} \epsilon_\mu(\vec{k}, \lambda) a^\dagger(\vec{k}, \lambda) \right], \quad (98)$$

où la somme sur le paramètre λ désigne une somme sur les états de polarisation possibles de ce champ. Dans le cas d'un champ massif, le paramètre λ prend trois valeurs distinctes associées aux deux états de polarisations transverses et à l'état de polarisation longitudinale—c'est-à-dire aux trois états de spin unité—, et dans le cas d'un champ de masse nulle, le paramètre λ prend seulement deux valeurs distinctes associées aux deux états de polarisations transverses—c'est-à-dire aux deux états d'hélicité (± 1).

Evidemment, cette discussion suppose que la composante de spin nul de la représentation $(1/2, 1/2)$ associée au champ vectoriel est identiquement nulle. Comme indiqué plus haut, cette projection covariante des composantes de spin unité ou d'hélicité (± 1) est effectuée par la condition

$$\partial_\mu A^\mu = 0, \quad (99)$$

ou encore en terme des vecteurs polarisation $\epsilon_\mu(\vec{k}, \lambda)$ dans l'espace des quantité de mouvement,

$$k^\mu \epsilon_\mu(\vec{k}, \lambda) = 0. \quad (100)$$

Finalement, les quantités multipliant les solutions en ondes planes $\left(e^{\mp ik \cdot x} \epsilon_\mu(\vec{k}, \lambda) \right)$ en (98), à savoir $a(\vec{k}, \lambda)$ et $a^\dagger(\vec{k}, \lambda)$, correspondent à nouveau aux opérateurs d'annihilation et de création, respectivement, des quanta ou particules associés au champ vectoriel réel $A_\mu(x)$. De la même manière que pour le champ scalaire, si le champ $A_\mu(x)$ était complexe, il y aurait doublement de ces opérateurs—en l'occurrence $a(\vec{k}, \lambda)$ et $b^\dagger(\vec{k}, \lambda)$ —associés dans ce cas aux particules *et antiparticules* créées et annihilées par le champ vectoriel $A_\mu(x)$, avec en outre l'existence d'une charge additive conservée associée à la symétrie $U(1)$ sous les transformations de phase du champ complexe.

Afin de correspondre à une interprétation physique cohérente, le développement en modes normaux (98) doit nécessairement définir les solutions aux équations du mouvement d'un système dont l'évolution dynamique est déterminée en terme d'une densité lagrangienne locale dans l'espace-temps. Dans le cas d'un champ vectoriel réel massif, cette densité est donnée par¹⁷,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu, \quad (101)$$

où le tenseur $F_{\mu\nu}$ est défini par

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (102)$$

étant entendu que la condition de Lorentz (99) est imposée sur le champ vectoriel. Cette théorie décrit effectivement en chaque point de l'espace-temps trois degrés de liberté *indépendants*, ces trois degrés de liberté correspondant aux trois composantes de spin unité des particules massives relativistes associées à ce champ.

¹⁷Il est possible de vérifier que le choix des signes des divers termes dans cette densité lagrangienne conduit effectivement à un densité hamiltonienne *définie positive* pour les degrés de libertés *physiques* se propageant dans l'espace-temps, en l'occurrence les composantes spatiales $A^i(x)$ du champ vectoriel.

Dans le cas d'un champ vectoriel de masse nulle, la densité lagrangienne (101) possède une symétrie additionnelle, à savoir celle sous laquelle le champ se transforme comme suit,

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu + \partial_\mu \chi(x), \quad (103)$$

où le paramètre de transformation $\chi(x)$ est une fonction *locale* dans l'espace-temps. Cette symétrie du champ vectoriel de masse nulle est donc une *symétrie locale* ou encore une *symétrie de jauge* qui outre la condition de Lorentz (99), permet la réduction des quatre composantes du champ vectoriel à deux degrés de liberté *physiques* seulement et se propageant dans l'espace-temps, ces deux degrés de liberté étant associés aux deux états d'hélicité (± 1) possibles des quanta de masse nulle de ce champ. De plus, puisque la symétrie de jauge en (103) modifie la composante de polarisation *longitudinale* du champ¹⁸, ces deux degrés de liberté physiques correspondent aux deux états de polarisations *transverses* du champ vectoriel de masse nulle. Plus loin, nous verrons comment un tel champ vectoriel apparaît de manière naturelle dans le contexte de symétries de jauge en général.

2.7 Particules de spin 1/2

Comme expliqué dans la section 2.5, le choix le plus simple de représentation du groupe de Lorentz invariante sous parité permettant la description de particules de spin 1/2 ou d'hélicité ($\pm 1/2$) est obtenu par la somme directe des deux représentations fondamentales (du groupe de recouvrement universel) de $SO(3, 1)$ de chiralités opposées, soit

$$(1/2, 0) \oplus (0, 1/2). \quad (104)$$

Le champ local associé à cette représentation est *le spineur de Dirac*, dénoté $\psi(x)$.

Le cas particulier de ces deux représentations fondamentales se distingue de par ce qu'elles sont également les représentations *spinorielles* du groupe de Lorentz, ces représentations pouvant être construites en terme de l'algèbre de Clifford associée à la métrique de Minkowski de signature $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$. Dans le cas présent, cette algèbre de Clifford coïncide avec l'algèbre dite de Dirac, engendrée par quatre matrices 4×4 sur les nombres complexes dénotées γ^μ dont les relations d'*anticommutation* sont,

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}, \quad (105)$$

et possédant les propriétés de conjugaison,

$$\left(\gamma^\mu\right)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0. \quad (106)$$

En particulier, la matrice définie par

$$\gamma_5 = \gamma^5 = i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3, \quad (107)$$

jouissant des propriétés suivantes,

$$\gamma_5^2 = \mathbb{1}, \quad \left(\gamma_5\right)^\dagger = \gamma_5, \quad (108)$$

¹⁸En effet, dans l'espace des quantités de mouvement, la transformation de jauge (103) correspond à une redéfinition du vecteur de polarisation, soit $\left(\epsilon'_\mu(\vec{k}, \lambda) = \epsilon_\mu(\vec{k}, \lambda) + \tilde{\chi}(\vec{k}) k_\mu\right)$, où la fonction $\tilde{\chi}(\vec{k})$ est liée à la transformée de Fourier du paramètre de jauge local $\chi(x)$. Par conséquent, la symétrie de jauge peut effectivement être mise à profit pour éliminer les composantes longitudinales du champ vectoriel de masse nulle.

joue un rôle important, comme nous allons le voir.

En terme de cette algèbre de Clifford-Dirac, les générateurs de l'algèbre de Lorentz dans sa représentation spinorielle invariante sous parité $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$ sont déterminés par les commutateurs,

$$\Sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sigma^{\mu\nu}, \quad \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]. \quad (109)$$

En effet, à l'aide de l'algèbre de Clifford-Dirac satisfaite par les matrices γ^μ , il est immédiat de vérifier que les matrices $\Sigma^{\mu\nu}$ obéissent l'algèbre du groupe de Lorentz en (75). La représentation du groupe de Lorentz ainsi obtenue à partir de l'algèbre de Clifford-Dirac est précisément la représentation $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$ considérée ici, associée au champ ou spineur de Dirac $\psi(x^\mu)$ possédant donc quatre composantes complexes indépendantes.

En fait, les deux représentations fondamentales $(1/2, 0)$ et $(0, 1/2)$ contenues dans la représentation de Dirac s'obtiennent en distinguant les composantes de chiralité gauche et droite. Or, la projection de ces deux types de composantes s'obtient à l'aide de la matrice γ_5 introduite plus haut. En effet, il est immédiat d'établir les règles d'anticommutativité ou de commutativité suivantes,

$$\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0, \quad [\gamma_5, \Sigma^{\mu\nu}] = 0, \quad (110)$$

montrant que bien que la matrice γ_5 ne soit pas diagonalisable dans l'algèbre de Clifford, elle peut l'être dans la représentation $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$ du groupe de Lorentz. De plus, puisque nous avons ($\gamma_5^2 = \mathbb{1}$), les valeurs propres de γ_5 sont soit (-1) , soit $(+1)$, tandis que les états propres correspondants s'obtiennent à l'aide des projecteurs,

$$P_L = \frac{1}{2} (1 - \gamma_5), \quad P_R = \frac{1}{2} (1 + \gamma_5), \quad (111)$$

tels que

$$P_L^2 = P_L, \quad P_R^2 = P_R, \quad P_L P_R = 0 = P_R P_L. \quad (112)$$

Ainsi, la réduction de la représentation de Dirac en terme des représentations de chiralité gauche et droite du groupe de Lorentz s'obtient par les projections suivantes,

$$\psi_L = P_L \psi, \quad \psi_R = P_R \psi, \quad (113)$$

associées aux représentations $(1/2, 0)$ et $(0, 1/2)$, respectivement. Ces représentations spinorielles du groupe de Lorentz correspondent ainsi aux *spineurs de Weyl* de chiralité gauche ou droite, respectivement. En particulier, nous avons,

$$\gamma_5 \psi_L = -\psi_L, \quad \gamma_5 \psi_R = +\psi_R. \quad (114)$$

En raison des propriétés de conjugaison (106) des générateurs γ^μ de l'algèbre de Clifford-Dirac, il est possible de montrer que les objets se transformant dans la représentation contravariante ou "inverse" de $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$ s'obtiennent de la manière suivante,

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0. \quad (115)$$

En particulier, cela signifie que si le spineur de Dirac se transforme sous une transformation de Lorentz ($x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$) dans l'espace-temps en terme de la représentation $S(\Lambda)$,

$$\psi \rightarrow S(\Lambda) \psi, \quad (116)$$

alors le spineur conjugué $\bar{\psi}$ se transforme comme suit,

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} S^{-1}(\Lambda). \quad (117)$$

Par conséquent, la combinaison suivante est invariante sous les transformations de Lorentz,

$$\bar{\psi} \psi. \quad (118)$$

Un tel terme de *couplage* d'un spineur de Dirac avec lui-même porte le nom de *couplage de Dirac*. Remarquons que ce couplage de Dirac est invariant sous les transformations de la phase complexe du spineur de Dirac. De la même manière, il est possible de montrer que la combinaison suivante est également invariante sous les transformations de Lorentz de l'espace-temps,

$$\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi. \quad (119)$$

En outre, en terme des projections de chiralité définie, nous avons alors les propriétés suivantes,

$$\bar{\psi}_R = \left(\bar{\psi} \right)_L, \quad \bar{\psi}_L = \left(\bar{\psi} \right)_R. \quad (120)$$

En particulier, les contributions de chiralité définie aux termes invariants mentionnés ci-dessus se décomposent comme suit,

$$\bar{\psi} \psi = \bar{\psi}_R \psi_L + \bar{\psi}_L \psi_R, \quad (121)$$

ainsi que,

$$\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi = \bar{\psi}_L \gamma^\mu \partial_\mu \psi_L + \bar{\psi}_R \gamma^\mu \partial_\mu \psi_R. \quad (122)$$

Remarquons déjà ici qu'un couplage de Dirac associe des spineurs de Weyl de chiralité opposée, tandis que les couplages de type cinétique apparaissant dans cette dernière relation associent des spineurs de Weyl de même chiralité.

La discussion ci-dessus démontre donc le rôle essentiel joué par l'algèbre de Clifford-Dirac dans la construction des représentations spinorielles du groupe de Lorentz. Or, un des résultats remarquables concernant cette algèbre est que toutes ses représentations possibles de dimension finie sont unitairement équivalentes, et correspondent donc à des représentations matricielles en terme de matrices 4×4 . Deux représentations parmi celles les plus utilisées sont certainement soit la représentation de Dirac pour laquelle nous avons,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad (i = 1, 2, 3), \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (123)$$

soit la représentation de chiralité pour laquelle nous avons,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad (i = 1, 2, 3), \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (124)$$

Dans la pratique, la représentation de Dirac est appropriée pour l'évaluation des grandeurs dans la limite non relativiste, tandis que celle de chiralité est utile dans la limite ultra-relativiste ou dans le cas de particules de masse faible voire nulle. En effet, dans cette dernière représentation, la matrice de chiralité γ_5 est diagonale, et permet donc la réduction immédiate en terme des représentations de chiralité définie appropriées pour des particules de masse nulle pour lesquelles l'hélicité et chiralité se confondent. En particulier, à l'aide des représentations des matrices γ^μ ci-dessus, il est possible de calculer explicitement les représentations des opérateurs L^i , K^i et L_\pm^i considérés dans la section 2.5 dans le cas général, et de se convaincre en particulier que dans la représentation chirale les opérateurs L_-^i et L_+^i n'agissent pas sur des spineurs de Weyl

de chiralité droite ou gauche, respectivement, et sont donc bloc diagonaux sur les sous-espaces de valeur propre (-1) ou $(+1)$, respectivement, de l'opérateur de chiralité γ_5 .

Afin de compléter cette discussion concernant les spineurs de Dirac et de Weyl, il est sans doute utile de présenter également les considérations suivantes. Il est bien connu que les représentations de $SU(2)$ —qui interviennent donc dans la construction des représentations du groupe de Lorentz—sont soit réelles, soit pseudo-réelles, c'est-à-dire qu'elles sont unitairement équivalentes à leurs représentations complexes conjuguées avec une matrice d'équivalence unitaire qui est soit symétrique, soit antisymétrique, respectivement. Ainsi, toutes les représentations tensorielles de $SU(2)$ sont réelles, tandis que toutes les représentations de spin demi-entier sont pseudo-réelles. En particulier dans le cas de la représentation spinorielle fondamentale de dimension deux définie par les matrices de Pauli, l'équivalence unitaire des représentations associées aux matrices σ^i et aux matrices σ^{i*} ($i = 1, 2, 3$) s'obtient à l'aide de la matrice $(-i\sigma^2)$ qui est effectivement antisymétrique. Ce fait particulier à $SU(2)$ a pour conséquence dans le contexte des représentations du groupe de Lorentz qu'à partir du spineur de Dirac complexe conjugué il est possible de construire un autre objet qui se transforme à nouveau dans la représentation $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$ du groupe de Lorentz. Cette construction fait intervenir l'opérateur de conjugaison de charge C , conduisant ainsi à un nouveau spineur de Dirac de la manière suivante,

$$\psi^c = C \bar{\psi}^T, \quad (125)$$

où dans le membre de droite apparaît le transposé du spineur $\bar{\psi}$. Dans les cas des représentations de Dirac ou de chiralité de l'algèbre de Clifford-Dirac, cet opérateur C est donné par,

$$C = i\gamma^2\gamma^0. \quad (126)$$

En particulier, les composantes de chiralité définie sont liées de la manière suivante,

$$\left(\psi_L\right)^c = \left(\psi^c\right)_R, \quad \left(\psi_R\right)^c = \left(\psi^c\right)_L. \quad (127)$$

D'autre part, étant donné un spineur de Dirac et son spineur conjugué ψ^c , les termes suivants sont des invariants de Lorentz,

$$\bar{\psi}^c \psi, \quad \bar{\psi} \psi^c. \quad (128)$$

Un tel type de *couplage* entre un spineur et son conjugué de charge porte le nom de *couplage de Majorana*. Remarquons que contrairement au couplage de Dirac $\bar{\psi}\psi$, le couplage de Majorana n'est pas invariant sous les transformations de la phase complexe du spineur de Dirac. Par conséquent dans un tel cas, il n'est pas possible d'associer à la phase complexe d'un tel spineur un nombre quantique additif conservé. Cette possibilité apparaît par exemple dans le cas des neutrinos—particules de charge électrique nulle—lorsque ceux-ci possèdent un terme de masse de Majorana, c'est-à-dire un terme où le couplage de Majorana est multiplié par un facteur de masse alors appelé *masse de Majorana*. Dans une telle circonstance il y a alors violation du nombre leptonique.

Remarquons que tout comme le couplage de Dirac, le couplage de Majorana couple des spineurs de Weyl de chiralité opposée, comme indiqué par exemple dans la relation suivante,

$$\bar{\psi}^c \psi = \overline{(\psi^c)_R} \psi_L + \overline{(\psi^c)_L} \psi_R. \quad (129)$$

De ce point de vue, les deux types de couplages ne se distinguent pas. Leur seule différence est dans ce que le couplage de Majorana n'est pas invariant sous les transformations de phase complexe de spineurs, tandis qu'un couplage de Dirac possède une telle invariance.

Etant donné le spineur conjugué de charge, il est également possible d'imposer une restriction sur le nombre de degrés de liberté au travers de la *condition de Majorana*,

$$\psi^c = \eta\psi, \quad (130)$$

où η est une phase complexe arbitraire. Un spineur de Dirac obéissant une telle relation est appelé un *spineur de Majorana*. En vertu des résultats donnés plus haut en (127), il est clair qu'il est impossible d'imposer à la fois une condition de Weyl—une chiralité définie—et une condition de Majorana sur un spineur de Dirac à quatre dimensions. D'autre part, un spineur de Majorana ne peut posséder une invariance sous les transformations de phase, bien que ses composantes soient complexes. C'est pour cette raison que des spineurs de Dirac ou de Weyl décrivent des particules qui sont différentes de leurs antiparticules, tandis que des spineurs de Majorana ne peuvent que décrire des particules qui s'identifient à leurs propres antiparticules, dans le cas de particules de spin 1/2.

Ces préliminaires concernant la représentation du groupe de Lorentz utilisée ayant été faits, il devient possible maintenant de considérer la dynamique d'un spineur de Dirac dont les quanta sont des particules libres de spin ou d'hélicité $(\pm)1/2$. A l'aide des résultats ci-dessus, il est clair qu'une densité lagrangienne possible est de la forme,

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi. \quad (131)$$

L'équation du mouvement correspondante est l'équation de Dirac,

$$\left[i\gamma^\mu\partial_\mu - m \right] \psi = 0. \quad (132)$$

Multipliant cette équation à gauche par l'opérateur $\left[i\gamma^\mu\partial_\mu + m \right]$ conduit à l'équation de Klein-Gordon pour chacune des quatre composantes du spineur de Dirac ψ ,

$$\left[\partial^\mu\partial_\mu + m^2 \right] \psi = 0. \quad (133)$$

Par conséquent, le paramètre m dans l'équation de Dirac correspond à la masse des quanta associés au champ de Dirac. Etant associé à un couplage de Dirac, un tel terme de masse porte le nom de *masse de Dirac*. Remarquons qu'à l'aide d'une transformation chirale du type $(\psi' = \gamma_5\psi)$, il est toujours possible de supposer que le paramètre m est positif.

La résolution de l'équation de Dirac procède suivant la même démarche que celle de l'équation de Klein-Gordon. Les solutions générales sont obtenues sous la forme suivante,

$$\psi(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2\omega(\vec{k})} \sum_{s=\pm} \left[e^{-ik\cdot x} u(\vec{k}, s) b(\vec{k}, s) + e^{+ik\cdot x} v(\vec{k}, s) d^\dagger(\vec{k}, s) \right], \quad (134)$$

où les spineurs $u(\vec{k}, s)$ et $v(\vec{k}, s)$ dans l'espace des moments satisfont aux équations suivantes,

$$\left[\gamma^\mu k_\mu - m \right] u(\vec{k}, s) = 0, \quad \left[\gamma^\mu k_\mu + m \right] v(\vec{k}, s) = 0, \quad (135)$$

tandis que la somme sur le paramètre $(s = \pm)$ correspond aux états propres de spin ou d'hélicité du champ de Dirac. Les facteurs $(e^{-ik\cdot x} u(\vec{k}, s))$ et $(e^{+ik\cdot x} v(\vec{k}, s))$ représentent les solutions en ondes planes dites d'énergie positive et négative, respectivement, tandis que les grandeurs $b(\vec{k}, s)$ et $d^\dagger(\vec{k}, s)$ correspondent—au niveau quantique—aux opérateurs d'annihilation et de

création des particules et antiparticules, respectivement, associées au champ de Dirac, en parfaite analogie avec le cas du champ scalaire complexe. Dans le cas présent cependant, ces opérateurs satisfont des relations d'*anticommutation* plutôt que des relations de commutation, à savoir,

$$\left\{ b(\vec{k}, s), b^\dagger(\vec{k}', s') \right\} = (2\pi)^3 2\omega(\vec{k}) \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') \delta_{ss'} = \left\{ d(\vec{k}, s), d^\dagger(\vec{k}', s') \right\}. \quad (136)$$

En fait, il est nécessaire même au niveau classique d'utiliser des variables de Grassmann impaires et complexes—des fonctions complexes anticommutes—pour les composantes du spineur de Dirac $\psi(x)$. En particulier, la quantification canonique met alors en correspondance les crochets de Poisson définis pour des variables de Grassmann impaires et les *anticommutateurs* des opérateurs quantiques associés. C'est ainsi que le spineur de Dirac, décrivant des particules de spin ou d'hélicité $(\pm)1/2$, conduit à la statistique de Fermi-Dirac d'application pour des particules de spin demi-entier plutôt qu'à celle de Bose-Einstein valable pour des particules de spin entier, en parfait accord avec le théorème spin-statistique valable en théories des champs relativistes quantifiés.

Remarquons que tout comme dans le cas de champs scalaires réels ou complexes décrivant donc des particules identiques à leurs antiparticules ou non, respectivement, un spineur de *Majorana* possède un développement en modes propres de la même forme qu'en (134), avec la seule différence que l'opérateur $d^\dagger(\vec{k}, s)$ est alors remplacé par $b^\dagger(\vec{k}, s)$. En d'autres mots, les quanta associés à un spineur de Majorana correspondent à des particules qui s'identifient à leurs propres antiparticules, et qui par conséquent ne peuvent posséder une symétrie sous les transformations de phase, tout comme pour un champ scalaire réel.

Considérons à nouveau le Lagrangien de Dirac en (131). Il est clair qu'une symétrie globale de ce système est celle des transformations de phase du spineur de Dirac $\psi(x)$,

$$\psi'(x) = e^{i\alpha} \psi(x), \quad \bar{\psi}'(x) = e^{-i\alpha} \bar{\psi}(x), \quad \psi^c(x) = e^{-i\alpha} \psi^c(x), \quad (137)$$

où α est un paramètre réel indépendant des coordonnées x^μ de l'espace-temps. En vertu du théorème de Noether, le courant conservé associé à cette symétrie de phase est le courant vectoriel engendrant cette symétrie $U(1)_V$,

$$J_V^\mu(x) = \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x), \quad (138)$$

dont la charge conservée correspondante est donc

$$Q_V = \int_{(\infty)} d^3\vec{x} \bar{\psi}(x) \gamma^0 \psi(x). \quad (139)$$

Cependant, outre la transformation de phase, il est également possible de considérer la transformation chirale de la forme,

$$\psi'(x) = e^{i\alpha\gamma_5} \psi(x), \quad \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x) e^{i\alpha\gamma_5}, \quad \psi^c(x) = \psi^c(x) e^{i\alpha\gamma_5}, \quad (140)$$

qui transforme donc de manière différente les composantes de chiralités opposées du spineur de Dirac $\psi(x)$, avec dans chaque cas un angle de mélange lié au paramètre réel constant α . Pour une telle transformation, le Lagrangien de Dirac devient,

$$\mathcal{L}' = i\bar{\psi}'\gamma^\mu\partial_\mu\psi' - m\bar{\psi}'\psi' = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}e^{2i\alpha\gamma_5}\psi. \quad (141)$$

Par conséquent, ce type de transformation ne peut être une symétrie du système que dans le cas d'une masse m nulle. Il doit effectivement en être ainsi, puisque d'une part un terme

de masse de Dirac couple les composantes de chiralité opposées, tandis qu'une transformation chirale affecte ces deux types de composantes de manière différente.

Lorsque la masse m est nulle, les courant et charge conservés associés à la symétrie chirale de type axial $U(1)_A$ sont,

$$J_A^\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma_5\psi(x), \quad Q_A = \int_{(\infty)} d^3\vec{x} \bar{\psi}(x)\gamma^0\gamma_5\psi(x). \quad (142)$$

En effet, un calcul explicite de la divergence de ce courant axial $J_A^\mu(x)$, utilisant l'équation de Dirac, montre que ce courant n'est conservé que lorsque la masse m est nulle.

De la même manière, considérant le Lagrangien d'un nombre n de spineurs de Dirac $\psi_i(x)$ de masses respectives m_i ($i = 1, 2, \dots, n$),

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^n \left[i\bar{\psi}_i\gamma^\mu\partial_\mu\psi_i - m_i\bar{\psi}_i\psi_i \right], \quad (143)$$

ce système peut posséder les symétries de saveur suivantes. Lorsque les masses m_i sont toutes différentes, seules les transformations de phase de chacun des spineurs individuellement sont des symétries, correspondant au groupe de symétries de saveur $[U(1)_V]^n$ associé aux nombres fermioniques individuels de ces n spineurs. Cependant, si toutes les masses m_i ($i = 1, 2, \dots, n$) sont identiques, alors ce groupe de symétrie devient $SU(n)_V \times U(1)_V$, où le premier facteur mélange les n saveurs de spineurs, tandis que le second facteur correspond à la transformation de phase commune à tous ces n spineurs, définissant ainsi le nombre fermionique *total*. Finalement, si toutes les masses sont non seulement égales mais nulles, le groupe de symétrie devient $SU(n)_L \times SU(n)_R \times U(1)_V \times U(1)_A$, associé aux transformations de saveur séparément pour les composantes de chiralité gauche et droite des n spineurs de masse nulle.

La théorie des interactions fortes, à savoir la chromodynamique quantique, possède précisément une telle symétrie chirale lorsque n saveurs de quarks ont une masse nulle. Cependant dans ce cas, en raison de la dynamique de cette théorie, et en particulier de l'existence des anomalies de saveur et des configurations en instantons des champs de jauge, la symétrie $U(1)_A$ valable au niveau classique est brisée au niveau quantique, et n'est pas une symétrie de la théorie. Cependant, il survit alors la symétrie chirale de saveur $SU(n)_L \times SU(n)_R \times U(1)_V$ qui se voit brisée dynamiquement dans le vide de la théorie—conduisant ainsi à $(n^2 - 1)$ bosons de Goldstone de masse nulle—laissant comme seule symétrie de saveur explicitement réalisée dans le spectre de la théorie celle associée au groupe $SU(n)_V \times U(1)_V$. Dans la réalité, ces symétries ne sont qu'approximatives en raison de la masse non nulle bien que faible des quarks de saveur u , d et s en comparaison à l'échelle typique des interactions fortes, la symétrie $U(1)_V$ étant alors associée au nombre baryonique B et la symétrie $SU(3)_V$ à la symétrie de saveur $SU(3)_F$ incluant la symétrie d'isospin $SU(2)_F$.

Pour conclure, outre les opérateurs de type vectoriel ou axial rencontrés ici, indiquons que sur l'algèbre de Clifford-Dirac il est possible de construire seize types de générateurs et donc d'opérateurs différents, en terme d'un spineur de Dirac. Ces opérateurs possèdent des propriétés spécifiques sous les transformations de Lorentz et de parité, ces propriétés pouvant être caractérisées par la représentation du groupe de Lorentz correspondante, ainsi que le contenu en spin J et leur parité P désignés par J^P . Ainsi, les opérateurs possibles de la forme,

$$\bar{\psi} \mathcal{O} \psi, \quad (144)$$

sont donnés par,

\mathcal{O}	$so(3,1)$	J^P
1	(0, 0)	0^+
γ_5	(0, 0)	0^-
γ_μ	(1/2, 1/2)	$0^+, 1^-$
$\gamma_\mu \gamma_5$	(1/2, 1/2)	$0^-, 1^+$
$\sigma_{\mu\nu}$	$(1, 0) \oplus (0, 1)$	$1^-, 1^+$

(145)

En particulier, la raison pour laquelle l'opérateur $\sigma_{\mu\nu}\gamma_5$ n'est pas repris dans cette table est la relation,

$$\sigma_{\mu\nu}\gamma_5 = \frac{1}{2} i \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \sigma^{\rho\sigma}. \quad (146)$$

3 Symétries et Interactions

Dans la section précédente, nous avons compris comment il est possible de construire des théories dynamiques invariantes de Lorentz, décrivant la propagation dans l'espace-temps de Minkowski de particules libres ou en interaction possédant à la fois un spin ou une hélicité bien définis et des symétries conduisant à des nombres quantiques conservés. Or, le rôle des symétries ne se limite pas à la compréhension de règles de sélections. L'une des grandes leçons des progrès de la physique du XX^{ième} siècle est le fait que les symétries peuvent également être à l'origine de la dynamique des interactions elles-mêmes, et qu'en fait *chacune* des interactions fondamentales connues dans la nature trouve son origine dans l'existence d'une symétrie à un niveau fondamental. Le but de cette section est de décrire comment un principe de symétrie peut avant-tout être un principe dynamique, conduisant à son tour à des interactions dont les propriétés sont totalement déterminées par la structure de la symétrie correspondante.

3.1 L'électrodynamique quantique

Considérons à nouveau le Lagrangien de Dirac pour un spineur de Dirac $\psi(x)$,

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi \quad . \quad (147)$$

Nous avons vu comment ce système est invariant sous les transformations de phase indépendantes des points de l'espace-temps, des composantes du spineur de Dirac,

$$\psi'(x) = e^{i\alpha} \psi(x). \quad (148)$$

La symétrie correspondante est celle du groupe abélien $U(1)$, dont les courant et charge conservés sont,

$$J^\mu(x) = \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x), \quad Q = \int_{(\infty)} d^3 \vec{x} J^0(x^0, \vec{x}). \quad (149)$$

Or, d'un point de vue conceptuel, l'existence d'une telle symétrie pose le problème suivant. Est-il raisonnable d'imposer l'existence d'une symétrie qui requiert de transformer toutes les particules dans l'univers décrites par ce système—en l'occurrence les électrons par exemple—*de manière identique* en tous les points de l'espace-temps à la fois et au même instant? Une telle possibilité va à l'encontre des idées de causalité et de simultanéité, qui jouent un rôle si fondamental dans le contexte de la relativité restreinte. Il est difficilement concevable que si la phase d'un électron de cette feuille de papier est modifiée, il faille *d'une manière identique et instantanément* modifier la phase de tous les électrons de l'univers.

Ce dilemme conduit donc à poser la question suivante: est-il possible de rendre la symétrie de phase $U(1)$ *locale* dans l'espace-temps, c'est-à-dire effectuer des transformations de phase différentes en chaque point de l'espace-temps, mais d'une telle manière que le système reste encore invariant sous de telles transformations, tout en étant en accord avec les idées de causalité et l'absence de notion de simultanéité en relativité restreinte dans un espace-temps de Minkowski? Si cela est possible, il faut s'attendre à ce que ce type de réalisation d'une symétrie nécessite l'introduction d'une nouvelle particule couplant au spineur de Dirac initial. En effet, afin de préserver l'invariance du système sous ces transformations, il faut qu'"un certain temps" après avoir modifié la phase d'un électron particulier, les phases de tous les autres électrons de l'univers aient été modifiées d'une manière identique, tout en maintenant la causalité lors de ce changement de phase. En d'autres mots, si la phase d'un électron de cette feuille de papier est modifiée localement, il faut au même moment envoyer en quelque sorte à tous les électrons de l'univers et à la vitesse de la lumière dans le vide une information les enjoignant de modifier leur phase en conséquence et d'une manière identique. Ainsi, rendre la symétrie locale implique une interaction entre les électrons de l'univers de par l'échange des quanta associés à un champ véhiculant cette information, à savoir un boson intermédiaire de masse nulle associé à la symétrie locale.

Dans le jargon, rendre une symétrie locale dans l'espace-temps correspond à *la jauger*. Ainsi, considérons de plus près la symétrie de phase $U(1)$ du spineur de Dirac lorsqu'elle est jaugée. Les transformations sont alors de la forme,

$$\psi'(x) = e^{i\alpha(x)} \psi(x), \quad \bar{\psi}'(x) = e^{-i\alpha(x)} \bar{\psi}(x), \quad (150)$$

où $\alpha(x)$ est une fonction arbitraire de l'espace-temps. Il est alors immédiat d'obtenir la transformation correspondante du Lagrangien de Dirac, à savoir,

$$\mathcal{L}'_{\text{Dirac}} = \mathcal{L}_{\text{Dirac}} - J^\mu \partial_\mu \alpha, \quad (151)$$

où J^μ est précisément le courant conservé associé à la symétrie de phase globale $U(1)$. Dans le cas présent, ce courant par contre est invariant sous les transformations de jauge locales,

$$J'_\mu = J_\mu. \quad (152)$$

Par conséquent, le Lagrangien de Dirac *n'est pas invariant* sous la symétrie de phase $U(1)$ jaugée. Cependant, rien n'empêche d'ajouter au Lagrangien initial un nouveau terme de la forme,

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -e A_\mu J^\mu = -e A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi, \quad (153)$$

dans lequel apparaît un nouveau champ A_μ couplant au courant conservé J^μ . En raison de l'invariance relativiste du Lagrangien et du fait que ce Lagrangien doit être réel, nécessairement ce nouveau champ est un champ vectoriel réel, dont les quanta sont donc des particules de spin ou hélicité unité, neutres sous la symétrie globale de phase $U(1)$. Ces particules sont donc les bosons de jauge associés à la symétrie de jauge $U(1)$, véhiculant une interaction entre

les quanta du spineur de Dirac. Cette interaction couple le boson de jauge à une paire des quanta du spineur de Dirac, l'intensité de cette interaction étant déterminée par le paramètre ou constante de couplage e .

De manière à ce que la somme $(\mathcal{L}_{\text{Dirac}} + \mathcal{L}_{\text{int}})$ soit invariante de jauge, il est nécessaire que le champ vectoriel de jauge se transforme également sous les transformations locales de jauge de la manière suivante,

$$A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha. \quad (154)$$

En effet, dans ce cas, la variation du Lagrangien de Dirac $\mathcal{L}_{\text{Dirac}}$ est exactement opposée à celle du Lagrangien d'interaction \mathcal{L}_{int} . Remarquons que pour des transformations de phase globales pour lesquelles le paramètre de jauge α est constant, le champ de jauge A_μ est *invariant*, et décrit donc effectivement des quanta neutres sous cette symétrie $U(1)$.

Finalement, de manière à donner une dynamique propre de propagation dans l'espace-temps au champ de jauge A_μ , il faut encore introduire le Lagrangien construit à partir du tenseur de jauge,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (155)$$

Ce tenseur est effectivement invariant de jauge sous les transformations en (154).

En conclusion, ayant jaugé la symétrie de phase $U(1)$ du spineur de Dirac, nous sommes amenés à considérer un système dont la dynamique est décrite par le Lagrangien,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{QED}} &= \mathcal{L}_{\text{Dirac}} + \mathcal{L}_{\text{int}} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ &= i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi - e A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (156)$$

Ce système est invariant sous les transformations de phase *locales* dans l'espace-temps du spineur de Dirac, accompagnées des transformations en (154) du champ de jauge A_μ véhicule d'interactions entre les quanta du spineur de Dirac et de ce champ vectoriel. En d'autres mots, jauger une symétrie conduit à des interactions dont la structure est totalement déterminée par la structure de la symétrie correspondante.

Remarquons que le boson de jauge A_μ couple directement au courant conservé J^μ associé à la symétrie de phase. Ce fait est valable en général, comme nous le verrons plus loin dans le cas de couplages de jauge soit à des champs scalaires, soit pour des symétries non abéliennes. Notons également qu'un terme de masse de la forme,

$$m^2 A_\mu A^\mu, \quad (157)$$

est interdit de par l'invariance de jauge, car en effet un tel terme n'est pas invariant sous les transformations (154) du champ de jauge A_μ . En d'autres mots, la symétrie de jauge *protège* la masse nulle des bosons de jauge associés à cette symétrie. A nouveau, cette conclusion est valable en toute généralité.

Finalement, il est bien connu que dans le cas de la symétrie de phase $U(1)$ associée à la charge électrique des particules, le Lagrangien construit ci-dessus sur base de cette symétrie jaugée est celui de l'électrodynamique quantique, c'est-à-dire la théorie des interactions entre électrons et photons. Dans ce cas, le champ vectoriel A_μ correspond aux potentiels scalaire et vecteur de l'électromagnétisme,

$$A^\mu = (\Phi, \vec{A}), \quad (158)$$

tandis que les composantes du tenseur de jauge $F^{\mu\nu}$ déterminent les champs électrique \vec{E} et magnétique \vec{B} ,

$$E^i = F^{0i}, \quad B^i = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} F_{jk}. \quad (159)$$

3.2 Dérivée covariante

Ayant compris qu'il soit possible de jauger une symétrie globale, il convient d'identifier la structure rendant une telle construction réalisable. Dans ce but, considérons à nouveau le Lagrangien en (156) écrit cette fois sous la forme suivante,

$$\mathcal{L}_{\text{QDE}} = i\bar{\psi}\gamma^\mu \left[\partial_\mu + ieA_\mu \right] \psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (160)$$

Comparé au Lagrangien de Dirac initial $\mathcal{L}_{\text{Dirac}}$ en (147), outre le terme quadratique associé au champ de jauge A_μ , nous constatons que la seule différence est la substitution de la dérivé partielle ordinaire ∂_μ par un nouveau type de dérivée, à savoir,

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu. \quad (161)$$

Afin de comprendre le rôle spécifique joué par ce type de dérivée, considérons ses propriétés sous les transformations locales,

$$\psi'(x) = e^{i\alpha(x)}\psi(x), \quad \bar{\psi}'(x) = e^{-i\alpha(x)}\bar{\psi}(x), \quad A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x). \quad (162)$$

Nous avons alors,

$$\begin{aligned} D'_\mu\psi' &= \left[\partial_\mu + ieA'_\mu \right] \psi' = e^{i\alpha} \left[\partial_\mu + i\partial_\mu\alpha + ieA_\mu - i\partial_\mu\alpha \right] \psi \\ &= e^{i\alpha} \left[\partial_\mu + ieA_\mu \right] \psi \\ &= e^{i\alpha} D_\mu\psi. \end{aligned} \quad (163)$$

Par conséquent, la dérivée D_μ appliquée sur le spineur $\psi(x)$ possède la propriété remarquable de se transformer *exactement de la même manière que le spineur de Dirac* sous les transformations du groupe de symétrie. Tout comme le spineur de Dirac, cette dérivée est *covariante* sous la symétrie de jauge $U(1)$.

C'est précisément dans cette structure de *dérivée covariante* associée à une symétrie que se trouve le secret de la possibilité de la construction de théories de jauge, c'est-à-dire de théories dont des symétries continues globales peuvent être rendues locales dans l'espace-temps avec en outre l'introduction des champs de jauge et des interactions associées. Ainsi dans le cas du Lagrangien de Dirac, il suffit de remplacer la dérivée ordinaire ∂_μ par la dérivée covariante D_μ , et d'ajouter au Lagrangien ainsi obtenu un terme cinétique induisant la propagation des bosons de jauge, à savoir essentiellement le carré du tenseur de jauge $F_{\mu\nu}$ correspondant. Dans le cas particulier du spineur de Dirac et de son invariance $U(1)$ sous les transformations de sa phase complexe, nous avons vu que la seule interaction ainsi introduite est celle du couplage des bosons de jauge au spineur de Dirac, au travers du terme,

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -eA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi. \quad (164)$$

Ce terme de couplage conduit au vertex d'interaction dont la représentation en terme de diagrammes de Feynman¹⁹ est donnée dans la Fig.1. Remarquons cependant que dans le cas de la symétrie $U(1)$, le boson de jauge A_μ ne couple pas à lui-même. Cette propriété est l'une des

¹⁹La justification et les règles associées des diagrammes de Feynman n'est pas discutée ici, mais est présentée dans la majorité des ouvrages consacrés à la théorie quantique des champs.

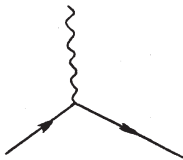


Figure 1: Le vertex d'interaction d'un boson de jauge et d'un spineur de Dirac.

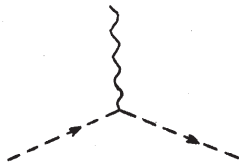


Figure 2: Vertex d'interaction d'un boson de jauge et d'une particule scalaire.

diverses conséquences de ce que ce groupe de symétrie soit abélien. En effet, nous avons vu que le courant conservé associé est invariant de jauge, tandis que la charge conservée correspondante Q commute évidemment avec elle-même (comme il se doit pour une symétrie abélienne). Cependant, nous verrons plus loin que ces propriétés ne sont plus d'application dans le cas d'une symétrie de jauge non abélienne.

De la même manière, il est maintenant immédiat de construire le Lagrangien de l'électrodynamique scalaire, c'est-à-dire le Lagrangien des interactions électromagnétiques de particules scalaires chargées. Pour cela considérons le Lagrangien d'un champ scalaire complexe $\phi(x)$ en interaction avec lui-même au travers d'un potentiel $V(|\phi|)$,

$$\mathcal{L} = |\partial_\mu \phi|^2 - m^2 |\phi|^2 - V(|\phi|). \quad (165)$$

Puisque le potentiel $V(|\phi|)$ ne dépend que de la norme de ce champ scalaire complexe $\phi(x)$, il est clair que le système décrit par ce Lagrangien est invariant sous la symétrie globale $U(1)$ associée à la phase du champ scalaire complexe.

Par conséquent, pour jauger cette symétrie il suffit à nouveau de remplacer la dérivée ordinaire ∂_μ par la dérivée covariante D_μ appliquée cette fois au champ scalaire complexe, et d'ajouter le terme cinétique pour le champ de jauge. Ainsi, le Lagrangien de l'électrodynamique scalaire est simplement,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{QED}_0} &= |D_\mu \phi|^2 - m^2 |\phi|^2 - V(|\phi|) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ &= |(\partial_\mu + ieA_\mu)\phi|^2 - m^2 |\phi|^2 - V(|\phi|) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (166)$$

Remarquons que tout comme pour le spineur de Dirac, il apparaît ainsi des termes d'interaction entre le boson de jauge et le champ scalaire. D'une part, nous avons ainsi le terme d'interaction du champ vectoriel A_μ au courant conservé J_μ associé à la symétrie globale $U(1)$ dans ce cas, en l'occurrence,

$$-eA_\mu \left\{ i \left[\phi^\dagger \partial^\mu \phi - \partial^\mu \phi^\dagger \phi \right] \right\} = -eA_\mu J^\mu, \quad (167)$$

et représenté dans la Fig.2.

Cependant dans le cas présent, il existe un terme d'interaction additionnel, à savoir,

$$e^2 A_\mu A^\mu |\phi|^2, \quad (168)$$

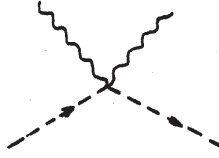


Figure 3: Vertex d'interaction de deux bosons de jauge et d'une particule scalaire.

représenté dans la Fig.3. Ce terme de type particulier, puisqu'il couple maintenant une particule scalaire à *deux* photons, est donc une *prédiction* du principe d'invariance de jauge dans le cas de l'électrodynamique quantique scalaire. En particulier, le couplage correspondant e^2 est directement lié au couplage e du vertex d'interaction d'un photon à une particule scalaire, c'est-à-dire le carré de la charge électrique de ces particules scalaires. Par conséquent, une telle prédiction se prête immédiatement aux tests expérimentaux, et constitue certainement une prédiction fondamentale d'une théorie de jauge.

Ainsi, la structure d'une théorie de jauge est telle qu'elle conduit à des relations spécifiques entre les couplages des différents vertex d'interaction possibles entre les particules et les bosons de jauge. Plus loin, nous verrons d'autres exemples fondamentaux de ce phénomène caractéristique de théories de jauge, pour lesquels de nombreux tests expérimentaux peuvent être envisagés.

3.3 Invariance de jauge non abélienne

Considérons maintenant le cas général d'un système de champs scalaires et spinoriels, dénotés $\phi(x)$ pour les besoins de la présente discussion, et dont le Lagrangien $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ possède une symétrie globale continue associée à un groupe de Lie compact G de dimension n . Les transformations linéaires de ce groupe de symétrie agissant sur les champs $\phi(x)$ sont donc,

$$\phi'(x) = U(\theta) \phi(x), \quad (169)$$

où la matrice $U(\theta)$ est de la forme,

$$U(\theta) = e^{i\theta^a T^a}, \quad (170)$$

les T^a ($a = 1, 2, \dots, n$) étant les générateurs du groupe G dans la représentation de ce groupe sous laquelle se transforment les champs $\phi(x)$. De par la structure du groupe compact G , ces générateurs, et donc également leurs représentations, satisfont l'algèbre de Lie,

$$\left[T^a, T^b \right] = i f^{abc} T^c, \quad (171)$$

où les facteurs constants f^{abc} ($a, b, c = 1, 2, \dots, n$) sont les *constantes de structure* du groupe de Lie G , tandis que l'espace de représentation de ce groupe est muni d'un produit interne défini positif tel que ces générateurs soient hermitiens et auto-adjoints,

$$\left(T^a \right)^\dagger = T^a. \quad (172)$$

En particulier, les transformations $U(\theta)$ sont alors unitaires et de dimension finie.

Par exemple, lorsque le groupe de symétrie est le groupe $SU(2)$, ces générateurs sont au nombre de trois, et obéissent l'algèbre bien connue,

$$\left[T^a, T^b \right] = i \epsilon^{abc} T^c, \quad a, b, c = 1, 2, 3, \quad (173)$$

où ϵ^{abc} ($a, b, c = 1, 2, 3$) est le tenseur invariant sous $SU(2)$ totalement antisymétrique tel que ($\epsilon^{123} = +1$). Dans le cas de champs ϕ se transformant dans la représentation spinorielle de dimension 2 de $SU(2)$, nous avons alors,

$$\phi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \xi \end{pmatrix}, \quad T^a = \frac{1}{2} \tau^a, \quad a = 1, 2, 3, \quad (174)$$

où τ^a sont les matrices de Pauli habituelles. De même, si les champs $\phi(x)$ se transforment dans la représentation vectorielle de dimension 3 de $SU(2)$, les générateurs T^a sont représentés par les matrices 3×3 d'éléments de matrice,

$$(T^a)^{bc} = -i \epsilon^{abc}, \quad a, b, c = 1, 2, 3. \quad (175)$$

D'une manière analogue, dans le cas du groupe de symétrie $SU(3)$ de dimension 8, les générateurs dans la représentation fondamentale de dimension 3 sont représentés par les matrices,

$$T^a = \frac{1}{2} \lambda^a, \quad a = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \quad (176)$$

où les λ^a sont les matrices de Gell-Mann généralisant les matrices de Pauli.

Un tel système ayant été spécifié, considérons maintenant comment il est possible de jauger la symétrie G , sous laquelle les champs $\phi(x)$ se transforment de la manière suivante,

$$\phi'(x) = U(\theta(x)) \phi(x), \quad (177)$$

où les paramètres $\theta^a(x)$ des transformations de symétrie sont maintenant des fonctions de l'espace-temps. Comme nous l'avons compris, il suffit pour cela de construire une dérivée covariante sous les transformations de jauge locales, c'est-à-dire un objet D_μ généralisant la dérivée ordinaire ∂_μ et possédant la propriété suivante sous les transformations locales de jauge,

$$(D'_\mu \phi') = U(\theta) (D_\mu \phi). \quad (178)$$

Considérant cette dérivée covariante de la forme

$$D_\mu = \partial_\mu + ig A_\mu, \quad (179)$$

où g est un couplage de jauge et A_μ un champ vectoriel prenant ses valeurs également dans l'algèbre du groupe de symétrie G , à savoir,

$$A_\mu = A_\mu^a T^a, \quad (180)$$

un simple calcul utilisant la relation (178) implique alors les transformations suivantes des champs de jauge réels A_μ^a ($a = 1, 2, \dots, n$),

$$A'^a_\mu T^a = U(\theta) (A^a_\mu T^a) U^{-1}(\theta) + \frac{i}{g} \partial_\mu U(\theta) U^{-1}(\theta). \quad (181)$$

En particulier, linéarisant cette relation au premier ordre dans les paramètres de transformation $\theta^a(x)$, il suit les formules de transformations infinitésimales suivantes de ces champs de jauge,

$$A'^a_\mu = A^a_\mu - \frac{1}{g} \partial_\mu \theta^a - f^{abc} \theta^b A^c_\mu. \quad (182)$$

Remarquons que contrairement au cas d'une symétrie abélienne pour laquelle les constantes de structure f^{abc} sont identiquement nulles, les bosons de jauge d'une symétrie non abélienne sont en général *non invariants* sous les transformations du groupe de symétrie, même lorsque les transformations de ce groupe sont globales. Le fait que ces transformations des bosons de jauge impliquent les constantes de structure signifie que la représentation du groupe de symétrie sous laquelle ces bosons se transforment est la représentation *adjointe* de G , puisqu'en effet les générateurs du groupe dans cette représentation sont déterminés par les éléments de matrice,

$$(T^a)^{bc} = -i f^{abc}. \quad (183)$$

Plus loin, nous verrons qu'une conséquence de cette propriété est l'existence de couplages des bosons de jauge avec eux-mêmes. En d'autres mots, les bosons de jauge d'une symétrie non abélienne portent une charge *non nulle* de la symétrie correspondante. Qu'il doive en être ainsi est également évident du point de vue de l'algèbre du groupe de jauge, puisque les générateurs T^a ne commutent pas tous entre eux, c'est-à-dire qu'ils portent eux aussi les charges associées à la symétrie du système. En particulier, ce constat implique également que les courants conservés $J_\mu^a(x)$ associé à la symétrie globale *ne sont pas invariants* sous les transformations du groupe de symétrie, que celles-ci soient globales ou locales. En effet, les charges conservées Q^a construites en terme des champs $\phi(x)$ et de ces courants conservés engendrent précisément l'algèbre du groupe de symétrie G , et s'identifient précisément aux générateurs T^a agissant sur les champs de la théorie.

Ainsi pour tout groupe de Lie compact abélien ou non, il est possible de construire une dérivée covariante des champs $\phi(x)$, en introduisant une collection de champs vectoriels réels A_μ^a dont le nombre est égal à la dimension n du groupe de symétrie G . Cependant, afin de construire une théorie dans laquelle ces champs de jauge possèdent leur propre dynamique, il nous faut encore déterminer un tenseur de jauge. Or, cela peut aisément se faire en utilisant les propriétés de covariance de la dérivée covariante D_μ . En effet, puisque l'on souhaite construire un objet antisymétrique à deux indices spatio-temporels, il nous suffit de considérer le commutateur de l'action de la dérivée covariante dans les directions associées aux indices μ et ν des coordonnées de l'espace-temps²⁰. Un calcul immédiat conduit alors au résultat suivant,

$$\left[D_\mu, D_\nu \right] = ig F_{\mu\nu}, \quad (184)$$

où le tenseur de jauge $F_{\mu\nu}$ est défini par,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig \left[A_\mu, A_\nu \right] = F_{\mu\nu}^a T^a, \quad (185)$$

ainsi que,

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c. \quad (186)$$

²⁰Cette construction est totalement analogue de celle du tenseur de Riemann en relativité générale. En effet, aussi bien pour les théories de jauge qu'en relativité générale—en fait, cette dernière théorie est également une théorie de jauge!—, la dérivée covariante faisant intervenir soit les champs de jauge, soit la connection affine de Christoffel—ou la connection de spin—, définit le transport parallèle dans l'espace-temps accompagné par une “rotation” dans un espace “interne”. Dans le cas de théories de jauge, cet espace interne est celui de la représentation du groupe de symétrie sous laquelle se transforment les champs de matière $\phi(x)$. Dans le cas de la relativité générale, cet espace “interne” est l'espace tangent en chaque point de l'espace-temps sur lequel agissent alors localement les transformations de Lorentz. Dans un cas comme dans l'autre, le commutateur de dérivées covariantes conduit à un objet associé aux contours fermés dans l'espace-temps et à la “rotation” de champs physiques lors de transports parallèles le long de ces contours. Cet objet est nécessairement covariant sous les transformations correspondantes.



Figure 4: Vertex à trois et à quatre bosons de jauge pour une théorie de jauge non abélienne.

De par la construction de ce tenseur de jauge $F_{\mu\nu}$, il est clair que nous avons la propriété de covariance suivante,

$$F'_{\mu\nu}(x) = U(\theta(x)) F_{\mu\nu}(x) U^{-1}(\theta(x)), \quad (187)$$

dont la signification géométrique dans l'espace du groupe de symétrie est que le tenseur de jauge $F_{\mu\nu}$ se transforme dans la représentation adjointe aussi bien pour des transformations locales que globales, une conclusion en accord avec la remarque précédente que les bosons de jauge A_μ^a se transforment dans cette représentation pour la symétrie globale G .

Une fois ce tenseur de jauge construit, nous sommes en mesure d'écrire immédiatement le Lagrangien du système dont la symétrie G est "jaugée", à savoir,

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = \mathcal{L}\left(\phi, (\partial_\mu + igA_\mu^a T^a)\phi\right) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}. \quad (188)$$

Par conséquent, les interactions auxquelles le principe d'invariance de jauge conduit sont les suivantes. Dans le cas de champs scalaires, nous retrouvons les termes

$$|\partial_\mu \phi|^2 \rightarrow |(\partial_\mu + igA_\mu^a T^a)\phi|^2, \quad (189)$$

correspondants à nouveau aux vertex d'interactions donnés dans les Figs.2 et 3, et dont les couplages sont donc déterminés par la constante de jauge g .

De même dans le cas de champs spinoriels $\psi(x)$, nous obtenons,

$$\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi \rightarrow \bar{\psi}\gamma^\mu (\partial_\mu + igA_\mu^a T^a)\psi, \quad (190)$$

reproduisant encore le vertex d'interaction de spineurs de Dirac avec les bosons de jauge de la Fig.1.

Finalement, dans le cas non abélien, le terme impliquant les tenseurs de jauge $F_{\mu\nu}^a$ détermine de nouvelles interactions,

$$-\frac{1}{4} \left[\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \right]^2. \quad (191)$$

En effet, nous obtenons alors des couplages à trois et à quatre bosons de jauge, dont les propriétés sont spécifiées par les constantes de structure f^{abc} et dont les couplages sont g et g^2 , respectivement (voir la Fig.4). Ainsi, le caractère non abélien de la symétrie conduit à des interactions des bosons de jauge entre eux, puisqu'ils portent tout comme les champs de matière $\phi(x)$ de la théorie les charges conservées associées à la symétrie jaugée.

Cette propriété unique aux théories de jauge non abéliennes implique donc que la dynamique des bosons de jauge de ces théories est *totalement* différente de la dynamique de bosons de jauge de symétries abéliennes tels les photons.

En particulier, dans le cas des interactions fortes dont la dynamique est celle d'une théorie de jauge de groupe de symétrie $SU(3)$ avec des champs de matière qui sont les quarks de spin $1/2$

et se transformant dans la représentation fondamentale de dimension 3 de $SU(3)$, le couplage des bosons de jauge—les huit gluons—à eux-mêmes entraîne les propriétés uniques de la liberté asymptotique et du confinement, correspondant à un régime perturbatif à petite distance et un régime non perturbatif à grande distance—l'échelle hadronique—, respectivement.

Outre ce fait qui distingue fondamentalement les théories de jauge abéliennes et non abéliennes, remarquons que toutes les interactions de jauge dans ces théories sont déterminées en terme *d'un seul couplage de jauge g* pour chaque groupe de Lie compact simple G . C'est la structure algébrique de la symétrie de jauge qui, au travers des constantes de structure f^{abc} , détermine totalement les propriétés des interactions de jauge. Evidemment, un tel constat propre aux théories de jauge s'offre immédiatement à la vérification expérimentale.

En outre, tout comme dans le cas abélien, la symétrie de jauge protège la masse des bosons de jauge. En effet, un terme de la forme,

$$M_{ab}^2 A_\mu^a A^{b\mu}, \quad (192)$$

n'est pas invariant de jauge pour les transformations de symétrie locales.

3.4 Brisure spontanée d'une symétrie globale

Jusqu'ici, nous avons compris comment il est possible de construire des théories de champs possédant des symétries soit globales, soit locales. Cependant, les exemples de symétries internes qui soient explicitement réalisées dans la nature sont rares, et souvent elles ne sont qu'approximatives, telles les symétries d'isospin ou de saveur. La plupart des symétries identifiées au niveau de la structure élémentaire de la matière ne sont pas manifestes dans les conséquences dynamiques des théories décrivant cette structure.

Lorsqu'une symétrie exacte ou approximative est manifestement réalisée dans le spectre de la théorie, cette symétrie est dite être réalisée *dans le mode de Wigner*. Dans ce cas, cela signifie que le vide—l'état d'énergie minimale—de la théorie est *invariant* sous la symétrie, et par conséquent, l'ensemble des états propres de l'Hamiltonien de la théorie—le spectre physique de la théorie—s'organise en *représentations* ou *multiplets* de cette symétrie. En effet, si T^a ($a = 1, 2, \dots, n$) désignent les générateurs d'un groupe de symétries continues globales G de dimensions n et engendrant des transformations finies de la forme $(U(\theta) = e^{i\theta^a T^a})$, dire que le vide $|0\rangle$ de la théorie est invariant sous le groupe de symétrie équivaut aux relations,

$$U(\theta)|0\rangle = |0\rangle, \quad T^a|0\rangle = 0, \quad a = 1, 2, \dots, n. \quad (193)$$

D'autre part, dire que les générateurs engendrent une symétrie de la théorie implique que ces générateurs commutent avec l'Hamiltonien H de la théorie,

$$[T^a, H] = 0. \quad (194)$$

Par conséquent, si $|E\rangle$ désigne un état physique du système diagonalisant l'Hamiltonien,

$$H|E\rangle = E|E\rangle, \quad (195)$$

tous les états obtenus par l'action des transformations du groupe G sur cet état $|E\rangle$ sont dégénérés en énergie avec $|E\rangle$,

$$HU(\theta)|E\rangle = EU(\theta)|E\rangle, \quad HT^a|E\rangle = ET^a|E\rangle. \quad (196)$$

Or par construction, l'ensemble des états ainsi construits se transforme précisément suivant une représentation linéaire du groupe de symétries continues G . Ainsi, si une symétrie est manifestement réalisée dans le spectre physique d'une théorie, nécessairement ce spectre est organisé en représentations de cette symétrie, tandis que le vide de la théorie est invariant sous cette symétrie. Ces propriétés caractérisent le mode de Wigner de réalisation d'une symétrie globale.

Cependant, il est possible qu'une symétrie, qu'elle soit exacte ou approximative, puisse ne pas être manifeste dans le spectre de la théorie. Par conséquent, il nous faut maintenant comprendre de quelle manière il est possible en quelque sorte de "cacher" l'existence de cette symétrie à un observateur. Ainsi dans cette section, nous considérons le cas des symétries globales brisées spontanément, et dont les conséquences ne sont donc plus manifestes. Par exemple, on peut imaginer le cas d'une barre tenue verticalement et soumise à une pression verticale suivant sa longueur. Tant que la barre n'a pas plié, le système possède une symétrie sous les rotations dont l'axe est celui de la barre. Cependant, lorsque la barre est pliée, cette symétrie est brisée spontanément par la configuration prise par la barre, c'est-à-dire la direction transverse à son axe dans laquelle est s'est pliée. Néanmoins, le système possède encore toujours la symétrie de rotations autour de l'axe vertical, bien que cette symétrie ne soit plus manifeste dans la configuration actuelle du système. En effet, la direction dans laquelle la barre s'est pliée est arbitraire, et toutes ces configurations sont obtenues les unes des autres précisément par une rotation autour de l'axe vertical. En d'autres mots, chacune de ces configurations, bien que brisant spontanément la symétrie du système, est une solution aux équations du mouvement du système, est transformée par l'action de la symétrie en n'importe quelle autre de ces configurations dégénérées en énergie, et *l'ensemble* de ces solutions est *invariant* sous les rotations autour de l'axe vertical.

Lorsqu'une symétrie est brisée spontanément dans le spectre de la théorie, elle est dite être réalisée *dans le mode de Goldstone*. Associé à ce mode, nous avons alors *le théorème de Goldstone* qui affirme que dans une telle situation,

- . le vide n'est pas invariant sous les transformations de symétrie;
- . il apparaît dans le spectre de la théorie des états physiques de masse nulle²¹ dont les nombres et les propriétés sont exactement ceux des générateurs de la symétrie ne laissant pas le vide invariant.

Bien que nous ne souhaitons pas démontrer ici ce théorème, il est possible de rendre ses conclusions plausibles. Lorsque le vide n'est pas invariant sous la symétrie, en fait le vide est dégénéré en une infinité de vides obtenus par transformations de symétrie,

$$H|0\rangle = E_0|0\rangle, \quad H|\theta^a\rangle = E_0|\theta^a\rangle, \quad (197)$$

où les états $|\theta^a\rangle$ sont définis par,

$$|\theta^a\rangle = e^{i\theta^a T^a} |0\rangle. \quad (198)$$

En particulier, cette dernière relation implique également que les états suivants,

$$T^a |0\rangle, \quad (199)$$

sont *non nuls*, contrairement au cas lorsque le vide est invariant sous la symétrie.

²¹Dans le cas d'une symétrie exacte; lorsque la symétrie n'est qu'approximative, ces états acquièrent des masses liées aux paramètres brisant explicitement la symétrie.

Ainsi, les générateurs T^a de la symétrie permettent de relier tous ces états dégénérés les uns aux autres, puisque l'action répétée de ces générateurs sur les états $T^a|0\rangle$ permet d'atteindre tous les états $|\theta^a\rangle$. Les transformations infinitésimales de l'état $|0\rangle$ conduisent donc à des états propres de l'Hamiltonien dégénérés aussi bien en énergie qu'en quantité de mouvement avec "le" vide $|0\rangle$ de la théorie. Ces états $T^a|0\rangle$ correspondent donc à des états physiques de masse nulle. Les états $T^a|0\rangle$ sont précisément les *bosons de Goldstone* associés à la brisure spontanée de la symétrie dans "le" vide de la théorie. Les vides de la théories sont dégénérés mais sont tous liés les uns aux autres par la symétrie du système, et diffèrent de par leur contenu en excitations associées aux bosons de Goldstone dans la limite de quantité de mouvement et énergie nulles. Les excitations élémentaires distinguant ces vides sont les bosons de Goldstone $T^a|0\rangle$, dont les propriétés sont effectivement déterminées par celles des générateurs T^a spontanément brisés dans la théorie, c'est-à-dire ne laissant pas le vide $|0\rangle$ invariant. Le nombre de bosons de Goldstone est donc égal au nombre de générateurs T^a brisés spontanément, tandis que leurs propriétés sont celles de ces générateurs. En particulier, les bosons de Goldstone se transforment donc dans la représentation adjointe du sous-groupe du groupe de symétrie G engendré par les générateurs T^a brisés spontanément. De plus, les propriétés spatio-temporelles des bosons de Goldstone, en l'occurrence leur spin et leur parité, sont celles de ces générateurs. Ainsi par exemple, dans le cas de symétries continues considérées jusqu'ici, les bosons de Goldstone sont des particules d'hélicité nulle, soit scalaires ou pseudoscalaires suivant que le courant conservé correspondant brisé spontanément est vectoriel ou axial. Dans le cas de la supersymétrie dont les générateurs sont des spineurs de Weyl, les bosons de Goldstone associés à la brisure spontanée de la supersymétrie sont alors des particules de masse nulle et d'hélicité $(\pm 1/2)$.

Les mécanismes dynamiques à l'origine de la brisure spontanée d'une symétrie globales peuvent être fort différents. Ainsi par exemple dans le cas de la symétrie chirale $SU(n)_L \times SU(n)_R \times U(1)_V$ de la chromodynamique quantique avec n saveurs de quarks de masses nulles, diverses raisons théoriques et phénoménologiques impliquent que cette symétrie globale (approximative) des interactions fortes est brisée spontanément par le vide de la théorie, laissant comme groupe de symétrie manifeste le groupe de saveur (approximatif) $SU(n)_V \times U(1)_V$. Les générateurs brisés spontanément sont donc les charges des courants axiaux

$$J_5^{a\mu} = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5 T^a \psi, \quad a = 1, 2, \dots, n^2 - 1, \quad (200)$$

où les T^a sont les générateurs du groupe $SU(n)$ dans sa représentation fondamentale de dimension n , et ψ désigne la colonne des n spineurs de Dirac triplets de couleur de masses nulles. Par conséquent, puisque ces symétries axiales sont brisées spontanément, il doit apparaître dans le spectre physique de la théorie $(n^2 - 1)$ bosons de Goldstone, particules de masse et d'hélicité nulles et pseudoscalaires, dont toutes les propriétés physiques sont totalement déterminées par les symétries chirales de la théories, et en particulier celles brisées spontanément. Dans le cas de la théorie des interactions fortes et pour trois saveurs de quarks de masses petites en comparaison de l'échelle des interactions fortes, ces huit bosons de Goldstone correspondent aux bosons pseudoscalaires ($J^{PC} = 0^{-+}$) légers, en l'occurrence les pions π^\pm, π^0 , les kaons K^\pm, K^0, \bar{K}^0 et le η , dont les masses sont non nulles puisque les symétries chirales dans ce cas ne sont qu'approximatives, mais restent néanmoins inférieures aux masses des autres états hadroniques de la théorie. Les propriétés physiques de ces particules peuvent également être déterminées sur base uniquement des symétries chirales approximatives, une approche constituant la base de la *théorie des perturbations chirales*.

Dans le cas de l'exemple ci-dessus d'une symétrie globale brisée spontanément, le mécanisme de brisure est non perturbatif, étant dû en fait à une condensation des paires quark-antiquark de masses nulles dans le vide de la théorie conduisant à une valeur moyenne non

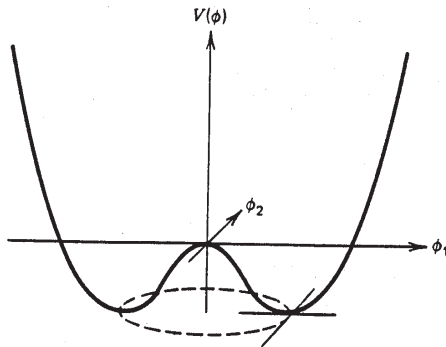


Figure 5: Potentiel du champ scalaire complexe dont la symétrie de phase $U(1)$ est brisée spontanément.

nulle de l'opérateur correspondant,

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle \neq 0, \quad (201)$$

pour les n spineurs de Dirac de masses nulles.

Il est également possible de construire des exemples de systèmes pour lesquels la brisure de la symétrie globale est perturbative et peut alors s'identifier déjà au niveau du Lagrangien de la théorie. Ainsi, considérons le cas d'une théorie d'un champ scalaire complexe $\phi(x)$ possédant la symétrie globale de phase $U(1)$, et décrit par le Lagrangien,

$$\mathcal{L} = |\partial_\mu \phi|^2 - \mu^2 |\phi|^2 - \lambda |\phi|^4, \quad (202)$$

où les paramètres réels μ^2 et λ sont tels que,

$$\mu^2 < 0, \quad \lambda > 0. \quad (203)$$

Par conséquent, le potentiel du champ complexe ϕ est donné par,

$$V(|\phi|) = \mu^2 |\phi|^2 + \lambda |\phi|^4, \quad (204)$$

dans lequel le terme de masse habituel, quadratique dans le champ scalaire, possède un signe *négatif*. Ce potentiel est représenté dans la Fig.5. Ainsi dans un tel cas, le minimum absolu du potentiel ne se trouve plus en l'origine ($\phi = 0$) dans l'espace de configuration du champ complexe, mais bien pour des valeurs non nulles de ce champ. La valeur ($\phi = 0$) ne correspond alors qu'à un maximum local du potentiel du champ complexe ϕ .

En conséquence, si l'on considérait la quantification canonique de la théorie en terme du champ $\phi(x)$, on serait rapidement conduit à l'identification de quanta de masse carrée *négative*, c'est-à-dire des modes *tachyoniques* conduisant à des violations de la causalité et de l'unitarité de la théorie. En fait, ces modes tachyoniques sont une conséquence de l'instabilité de la théorie développée autour du vide ($\phi(x) = 0$), conduisant à une condensation de ces modes dans ce vide qui n'est pas le minimum absolu en énergie de la théorie. Une fois le processus de condensation complété, le système se trouve dans un nouvel état d'énergie inférieure à celle du vide instable ($\phi = 0$) et stable sous les perturbations. Cependant, dans ce nouvel état la valeur moyenne du champ scalaire ne peut être nulle, et la symétrie globale de phase $U(1)$ est nécessairement brisée spontanément.

Pour illustrer ce mécanisme explicitement, considérons cette symétrie de phase globale,

$$\phi'(x) = e^{i\alpha} \phi(x), \quad (205)$$

où α est le paramètre de transformation de symétrie globale, ainsi que la théorie développée autour du minimum du potentiel, c'est-à-dire autour d'une configuration du champ complexe $\phi(x)$ dont la norme est déterminée par,

$$|\phi(x)| = \frac{1}{\sqrt{2}} v, \quad v = \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}}. \quad (206)$$

De manière à représenter les fluctuations soit classiques, soit quantiques, du champ scalaire $\phi(x)$ autour de cette configuration particulière minimisant l'énergie du système, considérons maintenant la paramétrisation du champ en terme de sa phase et de sa norme, cette dernière étant translatée autour de la valeur non nulle ci-dessus,

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\xi(x)/v} \left(\rho(x) + v \right). \quad (207)$$

En terme de cette représentation, le Lagrangien de la théorie prend maintenant la forme,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \rho \partial^\mu \rho + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\rho}{v} \right)^2 \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi - \frac{1}{2} \mu^2 (\rho + v)^2 - \frac{1}{4} \lambda (\rho + v)^4. \quad (208)$$

Par conséquent, sur base de ces différentes termes, le mode $\xi(x)$ ne possède pas de terme quadratique, et correspond donc au boson de Goldstone de masse nulle associé à la brisure spontanée de la symétrie de phase $U(1)$. Par contre, le mode $\rho(x)$ est massif, et de masse carrée *positive* donnée par,

$$m^2 = -2 \mu^2 > 0. \quad (209)$$

Remarquons que le mode de Goldstone $\xi(x)$ est associé aux fluctuations du champ complexe "le long du minimum du potentiel", en l'occurrence les fluctuations de la *phase* du champ complexe. Ce mode relie donc les divers états dégénérés d'énergie minimale absolue, pour lesquels la norme du champ $\phi(x)$ prend la valeur $(v/\sqrt{2})$. Par contre, le mode massif $\rho(x)$ est associé aux fluctuations dans la *norme* du champ complexe autour de la valeur minimale $(v/\sqrt{2})$, ces fluctuations étant caractérisées par un potentiel qui au premier ordre est quadratique dans le mode $\rho(x)$ et avec un coefficient donné par $(m^2/2)$. Ces deux types de modes sont en interaction, au travers du terme,

$$\frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{\rho}{v} \right)^2 - 1 \right] \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi. \quad (210)$$

Bien que la symétrie de phase $U(1)$ soit brisée spontanément de par la configuration d'énergie minimale de la théorie pour laquelle le champ complexe possède une valeur moyenne non nulle, cette symétrie est néanmoins encore opérationnelle mais se trouve maintenant réalisée de manière *non linéaire*. En effet, la transformation de phase en (205) conduit aux variations suivantes des modes de Goldstone et massif de la théorie,

$$\rho'(x) = \rho(x), \quad \xi'(x) = \xi(x) + v \alpha. \quad (211)$$

Notons en particulier que la propriété de transformation bien spécifique du mode de Goldstone nécessite une masse nulle pour ce mode, et que l'invariance $U(1)$ de la théorie requiert que le boson de Goldstone ne puisse apparaître dans le Lagrangien de la théorie qu'au travers de ses dérivées $\partial_\mu \xi$. Par conséquent, les couplages d'un boson de Goldstone de ce type sont nécessairement *dérivatifs*. Finalement, la transformation du mode de Goldstone indique également que l'action du groupe de symétrie $U(1)$ transforme effectivement les uns dans les autres les divers états dégénérés d'énergie minimale pour lesquels la symétrie globale est brisée spontanément. En vertu de la discussion générale ci-dessus, cette conclusion est valable pour toute réalisation d'une symétrie globale dans le mode de Goldstone.

3.5 Brisure spontanée d'une symétrie locale

Le théorème de Goldstone détermine les conséquences physiques de la brisure spontanée d'une symétrie *globale*. Il est certainement intéressant de considérer la situation d'une symétrie *locale* brisée spontanément. A titre d'illustration, revenons au système d'un champ scalaire complexe $\phi(x)$ possédant la symétrie de phase $U(1)$ décrit dans la section précédente, avec toutefois la différence que cette symétrie est maintenant réalisée localement dans l'espace-temps. Par conséquent, la dynamique de ce système est donnée par le Lagrangien,

$$\mathcal{L} = |(\partial_\mu + ieA_\mu)\phi|^2 - \mu^2 |\phi|^2 - \lambda |\phi|^4 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (212)$$

où le potentiel $V(|\phi|)$ du champ scalaire possède les mêmes propriétés que ci-dessus,

$$\mu^2 < 0, \quad \lambda > 0, \quad (213)$$

tandis que le tenseur de jauge $F_{\mu\nu}$ est défini en terme du boson de jauge $U(1)$ par la relation habituelle ($F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$).

Nous savons qu'une paramétrisation de ce système adéquate pour une identification correcte de ses modes physiques est donnée par,

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\xi(x)/v} [\rho(x) + v], \quad v = \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}}. \quad (214)$$

Cependant, contrairement au cas de la symétrie globale $U(1)$, le présent système est invariant sous les transformations *locales*, de la forme,

$$\phi'(x) = e^{i\alpha(x)} \phi(x), \quad A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x), \quad (215)$$

où $\alpha(x)$ est une fonction arbitraire définie sur l'espace-temps.

Par conséquent, *dans ce cas spécifique*, c'est-à-dire par vertu de l'invariance de jauge du système, étant donné la configuration (214) du champ scalaire complexe, il est *toujours* possible d'effectuer la transformation de jauge locale de paramètre

$$\alpha(x) = -\frac{1}{v} \xi(x), \quad (216)$$

conduisant alors à la configuration suivante des champs du système,

$$\phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\rho(x) + v], \quad A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{ev} \partial_\mu \xi(x). \quad (217)$$

En d'autres mots, grâce à la symétrie de jauge, il est possible de faire disparaître ("gauge away") du spectre physique de la théorie *le mode de Goldstone* $\xi(x)$, tandis que ce mode fait maintenant partie intégrante du champ vectoriel $A_\mu(x)$ en contribuant en fait à sa composante *longitudinale* (puisque les transformations de jauge modifient les composantes longitudinales des champs de jauge et les mélangent entre eux dans le cas d'une symétrie non abélienne). Le choix de cette jauge pour la description des degrés de liberté du système porte le nom de *jauge unitaire*, car dans cette jauge seuls les degrés de liberté *physiques* mais non des degrés de liberté auxiliaires de jauge apparaissent explicitement, rendant manifeste l'unitarité de la théorie.

Ainsi, en vertu de l'invariance de jauge du système, il est possible de considérer le développement de la dynamique de la théorie en terme des champs $\phi'(x)$ et $A'_\mu(x)$ donnés ci-dessus. Il suit alors pour le Lagrangien,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\partial_\mu \rho - ieA'_\mu(\rho+v) \right] \left[\partial^\mu \rho + ieA'^\mu(\rho+v) \right] - \frac{1}{2} \mu^2 (\rho+v)^2 - \frac{1}{4} \lambda (\rho+v)^4 - \frac{1}{4} F'_{\mu\nu} F'^{\mu\nu}. \quad (218)$$

Sur base des divers termes ainsi obtenus, il apparaît donc les résultats suivants. Tout d'abord, le mode $\xi(x)$, boson de Goldstone de la symétrie $U(1)$ brisée spontanément lorsque cette symétrie est globale, n'est plus un mode physique du système. Ce mode $\xi(x)$ joue maintenant le rôle de composante *longitudinale* du boson de jauge A_μ , qui en effet acquiert de par ce mécanisme *une masse non nulle* donnée par,

$$M_A^2 = e^2 v^2, \quad (219)$$

et nécessite par conséquent une telle composante. Finalement, le mode $\rho(x)$ reste un mode physique du système de masse

$$m^2 = -2\mu^2. \quad (220)$$

Remarquons également que la symétrie locale de jauge $U(1)$, bien que brisée spontanément, reste néanmoins réalisée de manière non linéaire en terme de l'ensemble des modes physiques $\rho(x)$ et $A'_\mu(x)$ ainsi que du mode de Goldstone $\xi(x)$,

$$\rho(x) \rightarrow \rho(x), \quad \xi(x) \rightarrow \xi(x) + v\alpha(x), \quad A'_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x). \quad (221)$$

De plus, il est possible de vérifier le compte des degrés de liberté physiques du système. Dans le cas de la symétrie locale $U(1)$ *non brisée spontanément*, les modes physiques sont au nombre de quatre, à savoir les modes massif $\rho(x)$ et de Goldstone $\xi(x)$ ainsi que les deux modes physiques transverses et de masse nulle du boson de jauge A_μ . Dans la phase où la symétrie de jauge *est brisée spontanément*, nous avons encore quatre modes physiques, à savoir le mode massif $\rho(x)$ ainsi que les trois composantes du boson de jauge massif $A'_\mu(x)$, dont la composante longitudinale est essentiellement le mode de Goldstone de la symétrie globale.

En conclusion, nous avons donc établi le résultat important suivant,

Lorsque le vide d'une théorie de jauge n'est pas invariant sous la symétrie locale, les modes qui dans le cas d'une symétrie globale seraient les modes de Goldstone associés aux générateurs de la symétrie ne laissant pas le vide invariant, disparaissent du spectre physique de la théorie, mais jouent le rôle des composantes longitudinales des bosons de jauge associés à la symétrie brisée spontanément, ces derniers bosons de jauge devenant ainsi massifs.

Bien que ce résultat est établi ici sur base de l'exemple le plus simple d'une symétrie abélienne couplée à un seul champ scalaire complexe, il reste vrai en toute généralité pour toute théorie de jauge et tous champs de matière possibles, que la symétrie locale soit abélienne ou non abélienne, que les champs soient scalaires ou spinoriels. Ce mécanisme très général et extrêmement élégant porte le nom de *mécanisme de Higgs*, bien que plusieurs personnes soient à l'origine de cette idée. Et les modes physiques scalaires, tel le mode $\rho(x)$ ci-dessus, portent alors le nom de *scalaires de Higgs*.

Précédemment, nous avons souligné le fait important qu'une symétrie de jauge protège la masse des bosons de jauge associés. Ici, nous voyons que ces bosons de jauge peuvent acquérir un terme de masse non nul à condition que la symétrie locale soit brisée spontanément, ce qui n'empêche qu'elle soit encore réalisée non linéairement sur les champs de la théorie. En fait, le mécanisme de Higgs est le seul connu permettant la construction de théories *renormalisables* (multiplicativement en théorie de perturbation à l'aide d'un nombre fini de contre-termes) de champs de spin unité massifs²². Aucune autre tentative de quantification de théories de tels champs massifs n'a été concluante. C'est à G. 't Hooft que l'on doit la démonstration de

²²Une exception est récemment apparue à cet énoncé, en terme de théories avec des couplages topologiques qui, à l'aide de transformations duales, deviennent alors équivalents au mécanisme de Higgs.

la renormalisabilité des théories de jauge abélienne et non abélienne, brisées spontanément ou non²³, conduisant au début des années 1970 à une résurrection des théories des champs comme cadre adéquat pour la description des particules élémentaires et de leurs interactions fondamentales.

Remarquons également que ce mécanisme de Higgs dans le cas de l'électrodynamique quantique couplée à un champ scalaire complexe correspond à la théorie *effective* de la supraconductivité à basse température décrite au niveau microscopique par la théorie de Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS). Dans ce cas, le champ scalaire complexe correspond à la densité locale des paires de Cooper, tandis que le photon acquiert une masse non nulle, dont la valeur est essentiellement l'inverse de la longueur de pénétration magnétique de London. La théorie effective de cette section permet de calculer un grand nombre des propriétés d'états supraconducteurs, tandis que la théorie fondamentale de BCS est nécessaire pour le calcul des valeurs de diverses grandeurs physiques qui déterminent les paramètres de ces propriétés, telle la longueur de pénétration magnétique par exemple.

En conclusion, nous avons mis en place tous les outils conceptuels et théoriques pour la construction du Modèle Standard des particules élémentaires et de leurs interactions fondamentales, basé sur le groupe de jauge $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ et impliquant des champs de matière spinoriels et scalaires associés aux quarks et leptons connus dans la nature—dont la liste est dressée dans l'Introduction—et à des bosons de Higgs nécessaires à la brisure spontanée de certaines de ces symétries de jauge. La construction de ce Modèle Standard fait l'objet de la section suivante.

4 Le Modèle Standard

Les observations expérimentales et les concepts et idées théoriques ayant conduit à la construction du Modèle Standard sont fort nombreux. Bien que ce texte ne soit pas l'endroit approprié pour rappeler ces divers progrès, soulignons néanmoins un des points expérimentaux capitaux, à savoir la découverte de la violation de la parité par les interactions faibles (des courants chargés).

Le point de vue adopté ici est le suivant. Sans spécifier les diverses raisons expérimentales et théoriques justifiant le choix du Modèle Standard comme description adéquate de la physique des particules élémentaires, nous discutons de quelle manière ce modèle est construit sur base d'une théorie de jauge dont le groupe de jauge est partiellement brisé spontanément à l'aide du mécanisme de Higgs. De plus, quelques conséquences physiques de ce modèle parmi celles qui sont les plus immédiates sont indiquées, les mettant en relation directe avec les grandes expériences de physique des hautes énergies.

4.1 Groupe de jauge et champs de matière

Le groupe de symétrie locale de jauge du Modèle Standard est $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$. Le facteur $SU(3)_C$ est associé aux interactions fortes entre les quarks, conduisant à huit gluons colorés auxquels se couplent les courants de couleur des quarks dans la représentation fondamentale de dimension 3. Les facteurs $SU(2)_L \times U(1)_Y$ sont associés aux interactions électrofaibles, conduisant après brisure spontanée de ces symétries au groupe de jauge $U(1)_{em}$ de l'électromagnétisme, ainsi que les interactions faibles des bosons intermédiaires W^\pm et Z_0 se

²³La renormalisabilité de l'électrodynamique quantique, une théorie de jauge abélienne non brisée spontanément, est due à R. P. Feynman, J. Schwinger et S.-I. Tomonaga.

couplant aux courants chargés et neutres des quarks et leptons. L'observation expérimentale de ce qui semble être une violation maximale de la parité conduit à un choix d'une structure de chiralité gauche ($V - A$) pour les courants électrofaibles chargés.

L'une des relations fondamentales dans la construction du modèle est la suivante,

$$Q = T_3 + \frac{1}{2}Y, \quad (222)$$

où T_3 désigne le générateur de la troisième composante de l'isospin faible associé au groupe $SU(2)_L$, tandis que Y est celui de l'hypercharge faible associée au groupe $U(1)_Y$. Cette nomenclature est héritée du secteur hadronique et de la formule de Gell-Mann-Nishijima dans ce contexte.

Les bosons de jauge de couleur sont dénotés G_μ^a ($a = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$), de tenseur de jauge

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a - g_S f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c, \quad (223)$$

où f^{abc} ($a, b, c = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$) sont les constantes de structure de $SU(3)_C$, et g_S la constante de couple de jauge des interactions fortes. Dans la représentation fondamentale de dimension 3, les générateurs T^a du groupe $SU(3)_C$ sont donnés par les matrices de Gell-Mann $\lambda^a/2$.

De même, les bosons de jauge du groupe $SU(2)_L$ sont désignés par W_μ^i ($i = 1, 2, 3$), avec le tenseur de jauge,

$$W_{\mu\nu}^i = \partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i - g \epsilon^{ijk} W_\mu^j W_\nu^k, \quad (224)$$

où ϵ^{ijk} ($i, j, k = 1, 2, 3$) sont les constantes de structure de $SU(2)_L$, et g est la constante de couplage de jauge correspondante.

Finalement, le boson de jauge du groupe $U(1)_Y$ est dénoté B_μ , dont le tenseur de jauge est,

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu. \quad (225)$$

La constante de couplage de ce groupe de jauge est désignée par g' .

Ayant spécifié le groupe de symétrie locale ainsi que les bosons de jauge associés et leurs constantes de couplage, il nous faut spécifier les champs de matière auxquels ils couplent. Evidemment, il s'agit des champs spinoriels des quarks et leptons, ainsi que de champs de Higgs dont le choix est à fixer. Comme nous l'avons vu plus haut, les représentations fondamentales du groupe de Lorentz pour la spécification de particules de spin ou hélicité $(\pm)1/2$ sont celles des spineurs de Weyl de chiralité soit gauche, soit droite. Par conséquent, pour chaque quark ou lepton, il est nécessaire de spécifier la représentation du groupe de jauge $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ sous laquelle chacune de ses composantes de chiralité gauche et droite se transforment. De plus, il nous faut tenir compte de la structure en générations des quarks et leptons, c'est-à-dire que ces choix de représentations de jauge doivent se répéter pour chaque génération. Ainsi, nous avons les choix indiqués dans la Table 2.

La notation utilisée dans la colonne de gauche désigne les fermions de chiralité définie pour l'ensemble des trois générations, dont le contenu est indiqué dans la colonne de droite. En d'autres mots, les symboles tels L'_L sous-entendent un indice de génération non explicite. De plus, le symbole " ' " attaché à tous ces spineurs de Weyl indique qu'il s'agit ici des fermions couplant aux bosons de jauge, et non nécessairement des fermions possédant une masse bien définie. En effet comme nous le verrons, les états propres de la matrice de masse sont en général des superpositions linéaires de ces fermions dits états propres des interactions électrofaibles. Il est donc important de maintenir la distinction à ce stade de la discussion. Finalement, la colonne du milieu dans la Table 2 donne le choix des représentations sous chacun des facteurs du groupe de jauge $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$. Ainsi, dans un triplet de la forme (R_C, R_L, R_Y) ,

	$SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$	
L'_L	$(1, 2, -1)$	$\begin{pmatrix} \nu'_{eL} \\ e'_L \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \nu'_{\mu L} \\ \mu'_L \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \nu'_{\tau L} \\ \tau'_L \end{pmatrix}$
E'_R	$(1, 1, -2)$	$e'_R \quad \mu'_R \quad \tau'_R$
Q'_L	$(3, 2, 1/3)$	$\begin{pmatrix} u'_L \\ d'_L \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} c'_L \\ s'_L \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t'_L \\ b'_L \end{pmatrix}$
U'_R	$(3, 1, 4/3)$	$u'_R \quad c'_R \quad t'_R$
D'_R	$(3, 1, -2/3)$	$d'_R \quad s'_R \quad b'_R$

Tableau 2: Représentations des trois générations des quarks et leptons dans le Modèle Standard.

R_C , R_L et R_Y désignent, respectivement, les représentations de $SU(3)_C$, $SU(2)_L$ et $U(1)_Y$ sous lesquelles se transforment les spineurs correspondants. Ainsi par exemple, seuls les quarks de chiralité gauche ou droite sont des triplets de couleur, tandis que tous les fermions de chiralité droite sont singlets sous l'isospin faible mais les fermions de chiralité gauche s'organisent en doublets d'isospin faible. Finalement, les valeurs des hypercharges faibles correspondantes R_Y sont déterminées sur base de la relation en (222).

Remarquons que le choix des représentations des quarks et leptons n'inclue que des neutrinos de chiralité gauche, la raison étant qu'aucune particule neutre de chiralité droite n'ait jamais été observée dans la nature. Par conséquent, il est impossible que les neutrinos du Modèle Standard puissent posséder une masse non nulle, puisqu'un terme de masse de Dirac ou de Majorana couple des fermions de chiralité opposée. Ainsi par construction du Modèle Standard Minimal—celui discuté ici—, les neutrinos sont de masse nulle, de chiralité et d'hélicité gauches.

Bien sûr, il est possible d'introduire dans le Modèle Standard trois neutrinos de chiralité droite,

$$N'_R : (1, 1, 0) \quad \nu'_{eR} \quad \nu'_{\mu R} \quad \nu'_{\tau R} \quad , \quad (226)$$

mais qui sont donc nécessairement neutres sous *toutes* les interactions de jauge de la théorie. Dans un tel cas, il peut apparaître des termes de masse soit de Dirac, soit de Majorana pour ces neutrinos, à conditions de les coupler aux doublets de leptons gauchers à l'aide de champs de Higgs appropriés, doublets de $SU(2)_L$ dans le cas de masses de Dirac, triplets de $SU(2)_L$ dans le cas de masses de Majorana.

Outre les masses des neutrinos, remarquons également que les masses de *tous* les quarks et leptons sont *nulles* à ce stade de la construction. En effet, de tels termes de masse de Dirac nécessitent de coupler des fermions de chiralité opposées, alors que tous les fermions gauchers sont des doublets de $SU(2)_L$ tandis que tous les fermions droitiers sont des singlets de²⁴ $SU(2)_L$. Par conséquent, les symétries de jauge du Modèle Standard protègent non seulement les masses de tous les bosons de jauge, mais interdisent également des termes de masse pour tous les quarks

²⁴La même difficulté existe pour l'hypercharge faible de ces fermions.

et leptons. Afin d'obtenir un spectre de masses non nulles de ces fermions et non seulement des bosons de jauge, il est nécessaire de briser spontanément la symétrie $SU(2)_L \times U(1)_Y$ à l'aide du mécanisme de Higgs, pour lequel la spécification du secteur de Higgs doit encore être faite.

Une telle situation pose le problème suivant. Le même mécanisme de Higgs doit être responsable des masses des bosons de jauge électrofaibles et des quarks et leptons, ces masses ne pouvant donc être *a priori* que du même ordre de grandeur. Or, nous savons que les échelles de masses des quarks et leptons varient sur plusieurs ordres de grandeur, et il n'est donc pas *naturel* d'imposer que le même mécanisme de Higgs puisse conduire à des échelles de masses si différentes. Une telle situation requiert un ajustement très fin des couplages des champs de Higgs aux fermions. Bien que techniquement rien ne s'oppose en principe à cela, un tel ajustement n'est pas *naturel*, et l'on souhaiterait connaître une solution plus élégante à ce *problème de la hiérarchie des masses*.

Finalement, parmi les champs de matière il nous faut encore spécifier le choix des scalaires de Higgs. Puisque l'on souhaite briser le groupe $SU(2)_L \times U(1)_Y$ en le sous-groupe $U(1)_{em}$ associé aux interactions électromagnétiques, mais non le groupe $SU(3)_C$, il est nécessaire que ces scalaires de Higgs soient neutres de couleur mais possèdent des charges d'isospin et d'hypercharges faibles *non nulles* mais dont au moins l'une des composantes soit de charge électrique nulle au travers de la relation (222). D'autre part, dans un modèle minimal, il est souhaitable que le même choix de scalaires de Higgs permettent d'induire des masses pour tous les quarks et leptons. Cette dernière exigence requiert que les scalaires de Higgs comptent au moins des doublets d'isospin faible. L'ensemble de ces considérations conduit ainsi au choix minimal suivant d'un seul doublet de Higgs,

$$\phi : (1, 2, 1) \quad \phi = \begin{pmatrix} \phi_+ \\ \phi_0 \end{pmatrix}, \quad (227)$$

où par convention la composante *inférieure* du doublet est de charge électrique nulle tel qu'indiqué par l'indice de cette composante (la première composante est donc de charge électrique (+1), tel qu'indiqué par l'indice correspondant). Cependant, dans le cas particulier de $SU(2)_L$, nous savons que la représentation spinorielle de dimension 2 est pseudoréelle, c'est-à-dire que le spineur complexe conjugué se transforme également comme un doublet à une transformation unitaire près qui dans le cas présent est donnée par la matrice ($i\tau_2$). Ainsi, nous avons également le doublet de Higgs suivant,

$$i\tau_2\phi^* : (1, 2, -1) \quad i\tau_2\phi^* = \begin{pmatrix} \phi_0^* \\ -\phi_+^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_0^* \\ \phi_- \end{pmatrix}. \quad (228)$$

Ce sont ces deux champs scalaires qui au travers de leurs couplages aux bosons de jauge et aux fermions de la théorie, doivent induire tous leurs termes de masse tels que requis expérimentalement.

Pour conclure, il est sans douter utile de mentionner ici—sans donner des détails dépassant le cadre de ces notes—qu'il est également indispensable de s'assurer que *toutes* les anomalies de jauge et gravitationnelles s'annulent dans la théorie, une condition nécessaire à sa cohérence quantique. Dans un espace-temps à quatre dimensions, ces anomalies ne peuvent que provenir de contributions de fermions chiraux, et puisque dans le secteur électrofaible du Modèle Standard le contenu fermionique est certainement chirale, il est indispensable de vérifier explicitement que toutes les anomalies éventuelles s'annulent dans le modèle, comme on peut effectivement s'en convaincre. Sans donner le détail de ce calcul ici, indiquons néanmoins que cette annulation des anomalies est obtenue pour chaque génération de quarks et leptons séparément, mais qu'au sein de chaque génération certaines de ces anomalies ne s'annulent que lorsque les

contributions des quarks et des leptons sont combinées. Or, le choix des représentations sous $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ ci-dessus ne s’est pas soucié de ce type de contraintes. Que celles-ci soient satisfaites “automatiquement” dans le modèle mais seulement lorsque les contributions des quarks et des leptons sont combinées, est certainement un mystère, et indique qu’il doit exister une relation profonde mais inconnue à ce jour entre les nombres quantiques des quarks et des leptons—comme par exemple entre les charges électriques et les couleurs de ces particules—et la structure chirale de leurs interactions, ce dernier problème étant lié à celui du spectre de masse fermionique.

4.2 Le Lagrangien du Modèle Standard Minimal

Ayant ainsi complètement spécifié le contenu en champs de matière et champs de jauge du Modèle Standard avec son contenu minimal en champ de Higgs, il ne nous reste qu’à écrire le Lagrangien de la théorie. Dans ce but, le dernier critère utilisé est celui de renormalisabilité (multiplicative en perturbation), qui nécessite qu’aucun des paramètres de couplage n’ait la dimension de l’inverse d’une masse à une certaine puissance non nulle²⁵. Etant donné qu’à quatre dimensions d’espace-temps les champs bosoniques ont la dimension d’une masse, et les champs fermioniques celle d’une masse à la puissance 3/2, les seuls couplages admissibles dans la construction du Lagrangien sont ceux entre un champ scalaire ou vectoriel avec deux fermions—respectivement, un couplage de Yukawa, ou un couplage de jauge, chacun de ces couplages étant sans dimension—, ou encore des couplages trilinéaires ou quadrilinéaires des champs scalaires entre eux, dont les couplages ont la dimension d’une masse ou sont sans dimension, respectivement. Finalement, les couplages quadratiques de ces champs conduisent à leurs termes de masse respectifs, avec en particulier les signes des termes de masse des champs de Higgs choisis tels qu’ils conduisent au mécanisme de Higgs pour la symétrie locale $SU(2)_L \times U(1)_Y$. Outre ces considérations, le Lagrangien complet doit inclure tous les termes renormalisables possibles invariants sous le groupe de jauge.

Ainsi, le Lagrangien total du Modèle Standard est de la forme suivante,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{gauge}} + \mathcal{L}_{\text{Higgs}} + \mathcal{L}_{\text{fermions}} + \mathcal{L}_{\text{Yukawa}}. \quad (229)$$

La contribution des bosons de jauge est donnée par,

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^i W^{i\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}. \quad (230)$$

Rappelons comment ces différents termes induisent les vertex d’interaction à trois et quatre bosons de jauge pour le secteur non abélien de la théorie, conduisant à des tests expérimentaux non triviaux.

La contribution du secteur minimal de Higgs est,

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = \left| \left(\partial_\mu + igW_\mu^i \frac{\tau^i}{2} + ig' B_\mu \frac{1}{2} \right) \phi \right|^2 - \mu^2 |\phi|^2 - \lambda |\phi|^4, \quad (231)$$

où le potentiel de Higgs est tel que,

$$\mu^2 < 0, \quad \lambda > 0. \quad (232)$$

²⁵Le point de vue actuel est que le Modèle Standard est la théorie effective d’une théorie plus fondamentale à une échelle d’énergie supérieure à environ 1 TeV. Dans ce cas, les couplages renormalisables sont les paramètres “relevants” dans la théorie effective, les effets spécifiques à la théorie plus fondamentale se manifestant au travers de couplages non renormalisables—tels des couplages à quatre fermions—possédant une dimension de l’inverse d’une masse à une certaine puissance, et donc proportionnels à une certaine puissance de l’inverse de l’échelle d’énergie caractéristique de la théorie fondamentale.

Les contributions fermioniques sont données par les dérivées covariantes, à savoir,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{fermions}} &= \overline{L}'_L \gamma^\mu (\partial_\mu + igW_\mu^i \frac{\tau^i}{2} + ig'B_\mu \frac{-1}{2}) L'_L + \\
&+ \overline{E}'_R \gamma^\mu (\partial_\mu + ig'B_\mu \frac{-2}{2}) E'_R + \\
&+ \overline{Q}'_L \gamma^\mu (\partial_\mu + ig_S G_\mu^a \frac{\lambda^a}{2} + igW_\mu^i \frac{\tau^i}{2} + ig'B_\mu \frac{1}{6}) Q'_L + \\
&+ \overline{U}'_R \gamma^\mu (\partial_\mu + ig_S G_\mu^a \frac{\lambda^a}{2} + ig'B_\mu \frac{2}{3}) U'_L + \\
&+ \overline{D}'_R \gamma^\mu (\partial_\mu + ig_S G_\mu^a \frac{\lambda^a}{2} + ig'B_\mu \frac{-1}{3}) D'_L.
\end{aligned} \tag{233}$$

Finalement, la contribution des couplages de Yukawa des fermions avec le doublet de Higgs sont données par,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} &= - \overline{L}'_L \lambda_\ell \phi E'_R - \overline{E}'_R \lambda_\ell^\dagger \phi^\dagger L'_L - \\
&- \overline{Q}'_L \lambda_d \phi D'_R - \overline{D}'_R \lambda_d^\dagger \phi^\dagger Q'_L - \\
&- \overline{Q}'_L \lambda_u (i\tau_2 \phi^*) U'_R - \overline{U}'_R \lambda_u^\dagger (i\tau_2 \phi^*)^\dagger Q'_L.
\end{aligned} \tag{234}$$

Dans cette dernière contribution, les paramètres λ_ℓ , λ_d et λ_u sont des matrices complexes (3×3) couplant les différentes générations entre elles au travers du doublet de Higgs et de son conjugué. Ce sont ces termes de couplages de Yukawa qui conduisent aux spectres de masses des quarks et leptons lors de la brisure spontanée de la symétrie de jauge lorsque le champ de Higgs acquiert une valeur moyenne dans le vide non nulle.

Et voici donc écrit le Lagrangien complet du Modèle Standard Minimal. Quelles en sont les conséquences phénoménologiques immédiates?

4.3 Mécanisme de Higgs et bosons de jauge

Avant toute chose, il nous faut considérer le mécanisme de Higgs dans le cas présent. La configuration du doublet de Higgs d'énergie minimale est telle que

$$|\phi| = \frac{1}{\sqrt{2}} v, \quad v = \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}}, \tag{235}$$

où v détermine donc la valeur dans le vide du champ scalaire. Puisque cette valeur est non nulle, la symétrie de jauge $SU(2)_L \times U(1)_Y$ sous laquelle le doublet de Higgs n'est pas neutre est nécessairement brisée spontanément dans le sous-groupe $U(1)_{\text{em}}$ identifié au groupe de jauge de l'interaction électromagnétique. En effet, la construction du modèle est telle que la charge Q définie par la relation (222) reste une symétrie explicite du vide de la théorie. Ainsi, le groupe de jauge survivant le mécanisme de Higgs est $SU(3)_C \times U(1)_{\text{em}}$.

En raison de l'invariance de jauge du système, il est toujours possible de supposer que la direction dans l'espace d'isospin faible dans laquelle le scalaire de Higgs acquiert une valeur moyenne non nulle est donnée par,

$$\langle \phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \tag{236}$$

de telle manière que dans cette jauge unitaire c'est la composante de charge électrique nulle du doublet de Higgs qui possède une valeur moyenne non nulle, et ainsi ne brise pas spontanément le groupe $U(1)_{\text{em}}$.

Les fluctuations du champ scalaire autour de cette configuration sont donc par exemple de la forme,

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \varphi_{+1}(x) + i\varphi_{+2}(x) \\ h(x) + v + i\varphi_0(x) \end{pmatrix}. \quad (237)$$

Les modes $\varphi_{+1}(x)$, $\varphi_{+2}(x)$ et $\varphi_0(x)$ sont ceux qui dans le cas d'une symétrie globale correspondraient aux bosons de Goldstone, tandis que le mode $h(x)$ serait alors le mode massif. En effet, parmi les quatre degrés de liberté du doublet complexe, trois doivent correspondre aux trois bosons de Goldstone de masse nulle lors de la brisure spontanée du groupe $SU(2)_L \times U(1)_Y$ dans le groupe de symétrie $U(1)_{\text{em}}$, le quatrième mode massif ayant alors une charge nulle sous la symétrie $U(1)_{\text{em}}$. Les modes $\varphi_{+1}(x)$, $\varphi_{+2}(x)$ et $\varphi_0(x)$ relient donc les divers vides dégénérés possibles de la théorie, et portent sous la symétrie $U(1)_{\text{em}}$ des charges (+1), (+1) et 0, respectivement. Par conséquent dans le cas de la symétrie *locale*, ces mêmes modes $\varphi_{+1}(x)$, $\varphi_{+2}(x)$ et $\varphi_0(x)$ conduisent aux composantes longitudinales des trois bosons de jauge massifs résultant de la brisure spontanée du groupe de jauge $SU(2)_L \times U(1)_Y$ en le groupe $U(1)_{\text{em}}$, laissant un seul des quatre bosons de jauge de masse nulle, ce dernier étant alors identifié au photon de l'interaction électromagnétique tandis que les trois autres bosons massifs sont les W^+ , W^- et Z_0 . Finalement, seul survit alors le mode de Higgs $h(x)$, dont les quanta sont donc des particules scalaires neutres, à savoir le scalaire de Higgs physique dont l'existence est ainsi prédite par le Lagrangien du Modèle Standard.

Un calcul explicite conduit à la masse du scalaire de Higgs physique,

$$m_h^2 = -2\mu^2 = 2\lambda v^2. \quad (238)$$

Il est clair qu'il est avantageux, du point de vue physique, d'utiliser plutôt les paramètres m_h^2 et v en lieu et place des paramètres ($\mu^2 < 0$) et λ du potentiel de Higgs, conduisant ainsi à une interprétation physique plus transparente. En particulier, pour une valeur *fixée* de l'échelle de brisure de symétrie v qui détermine les masses des bosons de jauge, la limite ($m_h \rightarrow \infty$) d'une masse du scalaire de Higgs infinie correspond à un couplage quadrilinéaire λ de ce scalaire avec lui-même qui tend également vers l'infini. Cependant, une théorie de perturbation en terme de ce couplage λ et préservant l'unitarité de la théorie quantifiée n'est valide que si ce couplage λ n'excède pas une certaine valeur limite, conduisant ainsi à une limite d'unitarité perturbative sur la masse m_h du scalaire de Higgs $h(x)$ de l'ordre de ($m_h \leq 0.8 - 1.0 \text{ TeV}/c^2$) pour une valeur dans le vide du secteur de Higgs de ($v = 247 \text{ GeV}$) requise par le spectre de masse des bosons de jauges W^\pm et Z_0 . Cette limite supérieure sur la masse du Higgs ne se voit que légèrement modifiée lorsque les corrections radiatives du potentiel de Higgs sont prises en compte.

Considérons maintenant le secteur de jauge de la théorie, et en particulier le spectre de masses auquel le mécanisme de Higgs conduit dans le cas présent. Ce spectre de masses est déterminé par le terme suivant du Lagrangien total,

$$|D_\mu \langle \phi \rangle|^2, \quad (239)$$

où

$$D_\mu \langle \phi \rangle = \frac{i}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}gv W_\mu^+ \\ -(gW_\mu^3 - g'B_\mu)v \end{pmatrix}, \quad (240)$$

les champs W_μ^\pm étant définis par

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} [W_\mu^1 \mp iW_\mu^2], \quad (241)$$

dont les quantas sont donc des particules de spin unité chargées, de charges électriques (+1) et (-1) pour W_μ^+ et W_μ^- , respectivement.

Il est évident que les bosons de jauge W_μ^\pm acquièrent ainsi un terme de masse, de valeur,

$$M_W = \frac{1}{2} g v, \quad (242)$$

tandis que les bosons de jauge neutres W_μ^3 et B_μ se mélangent pour conduire à un boson de jauge massif Z_μ et un boson de jauge de masse nulle A_μ . Ces bosons de jauge physiques neutres sont obtenus comme suit,

$$\begin{aligned} A_\mu &= \cos \theta_W B_\mu + \sin \theta_W W_\mu^3, \\ Z_\mu &= -\sin \theta_W B_\mu + \cos \theta_W W_\mu^3, \end{aligned} \quad (243)$$

où l'angle de mélange θ_W est déterminé en terme des constantes de couplage g et g' par,

$$\sin \theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \quad \cos \theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \quad \tan \theta_W = \frac{g'}{g}. \quad (244)$$

Les masses de ces bosons de jauge physiques sont donc données par,

$$M_A = 0, \quad M_Z = \frac{1}{2} \frac{v g}{\cos \theta_W} = \frac{M_W}{\cos \theta_W}. \quad (245)$$

En particulier, remarquons que le rapport ρ défini par

$$\rho = \frac{M_W}{\cos \theta_W M_Z} = 1, \quad (246)$$

prend exactement la valeur unité dans le Modèle Standard Minimal. Cette prédiction spécifique concernant les masses des bosons de jauge massifs et l'angle de mélange des bosons neutres est une conséquence du choix de représentation de Higgs en terme de doublets. Des représentations de $SU(2)_L$ autres que des doublets pour les champs de Higgs conduisent à des valeurs du rapport ρ différentes de l'unité. Or, ce rapport apparaît par exemple dans le rapport des interactions faibles des courants neutres aux courants chargés, et vaut en très bonne approximation précisément la valeur unité. Egalement, des mesures directes mais indépendantes des masses M_W , M_Z et de l'angle θ_W permettent une autre vérification de cette prédiction du Modèle Standard Minimal. Le paramètre ρ est donc extrêmement important pour les tests de précision du Modèle Standard incluant les contributions des corrections radiatives.

4.4 Spectre fermionique

Tournons-nous maintenant vers le mécanisme de génération des masses des quarks et leptons. Les termes de masse de Dirac pour ces champs sont déterminés par les couplages de Yukawa, c'est-à-dire le couplage des fermions à la valeur moyenne dans le vide $\langle \phi \rangle$ du doublet de Higgs,

$$\langle \phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \quad i\tau_2 \langle \phi \rangle^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (247)$$

Par conséquent, les termes de masses obtenus sont donnés par,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{masse}} = & -\frac{1}{\sqrt{2}} v (\overline{N}'_L \overline{E}'_L) \lambda_\ell \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} E'_R - \\
& -\frac{1}{\sqrt{2}} v (\overline{U}'_L \overline{D}'_L) \lambda_d \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} D'_R - \\
& -\frac{1}{\sqrt{2}} v (\overline{U}'_L \overline{D}'_L) \lambda_u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} U'_R - h.c. ,
\end{aligned} \tag{248}$$

où (*h.c.*) indique tous les termes hermitiens conjugués de ceux explicités, de manière à ce que le Lagrangien soit auto-adjoint (pour la théorie quantifiée, c'est-à-dire réel pour la théorie classique).

Il est clair comment ces divers termes conduisent à des masses de Dirac pour tous les fermions chargés. Cependant, les matrices de masse ainsi obtenues ne sont pas encore diagonalisées, et pour ce faire il faut se rappeler que les matrices de couplages de Yukawa λ_ℓ , λ_d et λ_u sont des matrices complexes 3×3 (ou $n \times n$ dans le cas de n générations de quarks et leptons) *a priori* totalement arbitraires. La diagonalisation de telles matrices requiert le résultat suivant.

Toute matrice complexe $n \times n$ arbitraire M est diagonalisable par une transformation *biunitaire* de la forme,

$$D = U M V^\dagger, \tag{249}$$

où D est donc la matrice diagonale, et U et V sont des matrices unitaires $n \times n$,

$$U^\dagger = U^{-1}, \quad V^\dagger = V^{-1}. \tag{250}$$

Ces transformations unitaires diagonalisent les matrices hermitiennes $(M M^\dagger)$ et $(M^\dagger M)$,

$$D_1 = U (M M^\dagger) U^\dagger, \quad D_2 = V (M^\dagger M) V^\dagger, \tag{251}$$

avec en particulier,

$$D_1 = D D^\dagger, \quad D_2 = D^\dagger D, \quad D_1 = D_2. \tag{252}$$

Remarquons que les valeurs propres des matrices $(M M^\dagger)$ et $(M^\dagger M)$ sont nécessairement positives, et par conséquent celles de la matrice M sont réelles, positives ou négatives. Lorsque la matrice M est hermitienne, nous retrouvons évidemment les résultats bien connus avec en particulier l'identité des transformations unitaires U et V .

Appliquant ces résultats aux matrices des couplages de Yukawa, nous avons ainsi,

$$\begin{aligned}
\lambda_\ell^{(d)} &= U_L^{(\ell)\dagger} \lambda_\ell V_R^{(\ell)} , \\
\lambda_d^{(d)} &= U_L^{(d)\dagger} \lambda_d V_R^{(d)} , \\
\lambda_u^{(d)} &= U_L^{(u)\dagger} \lambda_u V_R^{(u)} ,
\end{aligned} \tag{253}$$

où l'indice supérieur dans les membres de gauche de ces relations désigne la matrice diagonalisée associée aux saveurs des leptons chargés et des quarks de type *down* et *up*. De plus, les

transformations unitaires définies par les matrices $U_L^{(\ell)}$, $U_L^{(d)}$, $U_L^{(u)}$, $V_R^{(\ell)}$, $V_R^{(d)}$ et $V_R^{(u)}$ permettent la redéfinition des champs fermioniques associés aux matrices de masse diagonalisées, soit

$$\begin{aligned} L_L &= \begin{pmatrix} U_X^\dagger & 0 \\ 0 & U_L^{(\ell)\dagger} \end{pmatrix} L'_L, & E_R &= V_R^{(\ell)} E'_R, \\ Q_L &= \begin{pmatrix} U_L^{(u)\dagger} & 0 \\ 0 & U_L^{(d)\dagger} \end{pmatrix} Q'_L, & \begin{cases} U_R &= V_R^{(u)} U'_R, \\ D_R &= V_R^{(d)} D'_R. \end{cases} \end{aligned} \quad (254)$$

Remarquons que pour les leptons neutres de chiralité gauche N_L , nous avons introduit une matrice U_X unitaire 3×3 (ou $n \times n$ dans le cas de n générations) totalement arbitraire. En effet, une telle matrice peut toujours être introduite sans aucune conséquence physique, car aucun couplage de Yukawa n'existe pour ces champs en raison de l'absence de fermions neutres N_R de chiralité droite. Cependant, si de tels fermions étaient présents dans la théorie, la matrice U_X serait déterminée de la même manière que les autres matrices unitaires apparaissant ici, au moyen de la diagonalisation de la matrice des couplages de Yukawa associée. Evidemment, c'est le cas pour des théories conduisant à des termes de masse pour les neutrinos.

En conclusion, une fois ces diagonalisation effectuées, les termes de masse de Dirac des fermions chargés sont donnés par,

$$\mathcal{L}_{\text{masse}} = -\frac{v}{\sqrt{2}} \bar{E} \lambda_\ell^{(d)} E - \frac{v}{\sqrt{2}} \bar{D} \lambda_d^{(d)} D - \frac{v}{\sqrt{2}} \bar{U} \lambda_u^{(d)} U. \quad (255)$$

Remarquons que pour les valeurs propres négatives des matrices diagonalisées des couplages de Yukawa, il est toujours possible d'utiliser la transformation chirale

$$\psi \rightarrow \psi' = \gamma_5 \psi, \quad (256)$$

agissant sur le spineur de saveur associée et ainsi modifier le signe du terme de masse correspondant. Une telle transformation chirale est alors absorbée dans les éléments des matrices U_L et V_R de saveur appropriée. De cette manière, les couplages de Yukawa conduisent toujours à une matrice de masse de fermions chargés diagonale et de valeurs *positives*. Typiquement, les masses des fermions sont donc données par,

$$m_{\text{fermion}} = \frac{1}{\sqrt{2}} v (\text{couplage de Yukawa}). \quad (257)$$

Ainsi, dans le contexte du Modèle Standard Minimal, la hiérarchie de masse des quarks et leptons doit se comprendre en terme d'une hiérarchie répartie sur plusieurs ordres de grandeur des couplages de Yukawa, clairement une situation *non naturelle*. Ceci constitue le problème de la hiérarchie du spectre de masse fermionique.

En conclusion, les fermions états propres de masse—et donc également états propres de l'Hamiltonien de la théorie—qui se propagent comme particules dans l'espace-temps sont les quanta des champs N_L , E , U et D introduits ci-dessus. Ce sont ces champs qui créent les états physiques des quarks et leptons. Cependant, les états fermioniques qui couplent aux bosons de jauge sont les champs N'_L , E' , U' et D' dans leurs diverses composantes de chiralité définie. Nous verrons dans la section 4.5 quelles sont les conséquences physiques de ces rotations dans l'espace des saveurs des quarks et leptons entre les états qui participent aux interactions fondamentales et les états qui se propagent dans l'espace-temps, puisque ces diagonalisations de couplages de Yukawa et des matrices de masse conduisent à des redéfinitions des couplages fermioniques aux bosons de jauge physiques.

Remarquons également que les diagonalisations effectuées ci-dessus *n'affectent pas* les termes cinétiques des fermions, car ces termes couplent des fermions de *même* chiralité, contrairement aux termes de Yukawa,

$$\overline{\psi}_L i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_L, \quad \overline{\psi}_R i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_R. \quad (258)$$

En effet, les transformations unitaires U_L et V_R agissent séparément sur les fermions de chiralité gauche et droite. En outre, tout comme nous avons déjà fait usage de la liberté d'effectuer des transformations chirales du type ($\psi' = \gamma_5 \psi$) pour chaque type de fermion chargé de masse définie, il nous reste encore la liberté d'effectuer des transformations de *phase* individuellement pour chacun de ces fermions états propres de leurs matrices de masse. Cette dernière possibilité de transformations dans l'espace des saveurs déterminera finalement quelles sont les combinaisons des couplages de Yukawa qui conduisent à des paramètres physiques de la théorie, comme il est discuté dans la section suivante.

4.5 Courants neutres et chargés

Ayant déterminé les états propres de masse des scalaire de Higgs, bosons de jauge et fermions, il est possible maintenant de considérer les interactions de ces particules avec les bosons de jauge physiques dans le secteur électrofaible de la théorie. Dans le cas du scalaire neutre de Higgs $h(x)$, ces interactions sont déterminées par le couplage $|D_\mu \phi|^2$ évalué pour les fluctuations du champ $\phi(x)$ développé autour de la configuration de sa valeur dans le vide $\langle \phi \rangle$. Dans le cas des fermions auxquels nous nous intéressons de manière plus spécifique dans cette section, ces couplages sont déterminés à partir des couplages apparaissant dans les dérivées covariantes du type,

$$\overline{\psi} i \gamma^\mu D_\mu \psi. \quad (259)$$

Parmi ces couplages, il y a les couplages aux bosons de jauge physiques chargés W^\pm , et ceux aux bosons de jauge neutres Z et γ . Les premiers conduisent aux interactions faibles de type *courants chargés*, tandis que les secondes aux interactions faibles de type *courants neutres* et *électromagnétiques*. Considérons tout d'abord la situation des courants chargés.

Ceux-ci sont donc déterminés à partir des couplages faisant intervenir les bosons chargés sous la forme,

$$W_\mu^1 T^1 + W_\mu^2 T^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} W_\mu^+ T^+ + \frac{1}{\sqrt{2}} W_\mu^- T^-, \quad (260)$$

où les champs W_μ^+ et W_μ^- sont définis en (241), tandis que T^+ et T^- sont les opérateurs habituels,

$$T^+ = T^1 + iT^2, \quad T^- = T^1 - iT^2. \quad (261)$$

Par substitution directe de ces relations dans les dérivées covariantes appropriées, nous obtenons alors les couplages des fermions aux courants chargés. Cependant, il convient d'exprimer ces couplages en terme des fermions diagonalisant leurs matrices de masse, conduisant finalement aux contributions suivantes,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{c.c.} = & -\frac{1}{2\sqrt{2}} g \overline{E} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) W_\mu^- \left(U_L^{(\ell)\dagger} U_X \right) N - \\ & -\frac{1}{2\sqrt{2}} g \overline{D} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) W_\mu^- \left(U_L^{(d)\dagger} U_L^{(u)} \right) U + h.c. \end{aligned} \quad (262)$$

Parmi ces termes, considérons tout d'abord les contributions leptoniques. Dans ce cas, en raison de la liberté qui existe de spécifier la matrice U_X de manière totalement arbitraire,

faisons le choix,

$$U_X = U_L^{(\ell)}, \quad (263)$$

ce qui n'entraîne *aucune* conséquence physique. Aussi, les interactions de courants chargés leptoniques deviennent,

$$\mathcal{L}_{c.c.}^{\text{leptonique}} = -\frac{g}{2\sqrt{2}} W_\mu^- \bar{E} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) N + h.c. \quad (264)$$

Evidemment, la raison pour laquelle il est toujours possible de compenser la rotation dans l'espace des saveurs leptoniques diagonalisant la matrice de masse des leptons chargés par une rotation dans l'espace des saveurs de neutrinos est que ces derniers, étant tous de masse nulle, sont dégénérés et donc, la seule manière de lever cette dégénérescence est en spécifiant le lepton chargé physique auquel chacun de ces neutrinos couple, permettant ainsi de distinguer chacun des neutrinos par un nombre quantique de saveur caractéristique du lepton chargé correspondant.

Remarquons que sous de telles circonstances, il est possible d'ignorer la possibilité que les leptons états propres de masse ou états propres des interactions électrofaibles soient distincts, puisqu'une telle distinction ne peut conduire à des conséquences physiques. Ainsi d'emblée il est permis dans ce cas de supposer que nous ayons²⁶,

$$N_L = N'_L, \quad E_L = E'_L, \quad E_R = E'_R, \quad (265)$$

tandis que la matrice de couplages de Yukawa λ_ℓ est proportionnelle à la matrice de masse des leptons chargés, de telle manière que,

$$U_L^{(\ell)} = \mathbb{1}, \quad V_R^{(\ell)} = \mathbb{1}, \quad (266)$$

ainsi que

$$\lambda_\ell = \frac{\sqrt{2}}{v} \begin{pmatrix} m_e & 0 & 0 \\ 0 & m_\mu & 0 \\ 0 & 0 & m_\tau \end{pmatrix}. \quad (267)$$

Ainsi, puisque dans le Modèle Standard Minimal les neutrinos sont de masse nulle, il ne peut y avoir de mélange de saveur de ces neutrinos tandis qu'un mélange de saveur des leptons chargés est sans conséquence physique. De plus, ce même fait implique l'existence de symétries globales associées aux nombres leptoniques de type "électron", "muon" et "tau" caractérisant chacune des trois générations de leptons. Ces symétries globales leptoniques du Modèle Standard Minimal sont donc une conséquence de ce que les neutrinos aient une masse nulle dans le Modèle Standard Minimal qui n'inclue pas de neutrinos de chiralité droite, et ces symétries apparaissent en dépit de ce qu'elles ne soient pas imposées en tant que telles dans la construction de cette théorie. Par conséquent, tout test expérimental de la conservation des nombres leptoniques²⁷ est avant tout un test du Modèle Standard Minimal et de la masse nulle de *tous* les neutrinos. Dans le cas où un tel test était positif, un au moins des neutrinos devrait être massif, avec comme conséquence immédiate la possibilité de mélanges de saveurs de neutrinos, et les phénomènes bien connus d'oscillations de neutrinos par exemple, comme cela a en effet été observé.

²⁶Nous verrons plus loin que les matrices de rotations des saveurs leptoniques de chiralités gauche ou droite U_X , $U_L^{(\ell)}$ et $V_R^{(\ell)}$ n'interviennent pas dans les courants neutres non plus.

²⁷Par exemple, la conservation des nombres leptoniques interdit les conversions ($\mu \rightarrow e\gamma$) ou ($\tau \rightarrow \mu\gamma$), les oscillations muonium-antimuonium ($\mu^- e^+ \leftrightarrow \mu^+ e^-$) ou encore la double désintégration $\beta\beta_{0\nu}$ sans émission de neutrinos.

Considérons maintenant la situation des courants chargés des quarks,

$$\mathcal{L}_{c.c.}^{\text{quarks}} = -\frac{g}{2\sqrt{2}} W_\mu^- \bar{D} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) U_{\text{CKM}} U + h.c., \quad (268)$$

où nous avons défini la matrice de *Cabibbo-Kobayashi-Maskawa* (CKM) par

$$U_{\text{CKM}} = U_L^{(d)\dagger} U_L^{(u)}. \quad (269)$$

Contrairement au secteur leptonique, aucune liberté de rotations dans les espaces de saveurs des quarks de types *up* et *down* n'existe, et donc en général cette matrice de CKM ne peut se réduire à la matrice identité. Remarquons que cette matrice combine en quelque sorte une rotation *relative* dans les espaces de saveurs des quarks de type *up* et *down* de chiralité gauche *uniquement*.

Pour des raisons historiques, le choix habituel est de supposer que nous ayons,

$$U_L^{(u)} = \mathbb{1}, \quad (270)$$

correspondant à l'identité des états propres de masse et des interactions électrofaibles des quarks de type *up* et de chiralité gauche,

$$U_L = U'_L. \quad (271)$$

Pour ce choix, la matrice de CKM se réduit alors à une matrice unitaire, à savoir,

$$U_{\text{CKM}} = U_L^{(d)\dagger}. \quad (272)$$

D'autre part, puisque les matrices $V_R^{(u)}$ et $V_R^{(d)}$ n'interviennent pas dans cette discussion²⁸, il est également permis de supposer d'emblée que nous ayons simplement,

$$V_R^{(u)} = \mathbb{1}, \quad V_R^{(d)} = U_L^{(d)\dagger}, \quad (273)$$

correspondant donc aux identifications,

$$U_R = U'_R, \quad D_R = U_L^{(d)\dagger} D'_R. \quad (274)$$

Par conséquent étant donné ces choix, les états propres de masse et des interactions faibles sont identifiés pour les quarks de type *up*,

$$U = U' : (u \ c \ t) = (u' \ c' \ t'), \quad (275)$$

tandis que pour les quarks de type *down* les différentes saveurs se mélangent au travers de la matrice de CKM,

$$D = U_{\text{CKM}} D' : (d \ s \ b) = U_{\text{CKM}} (d' \ s' \ b'). \quad (276)$$

Associés à ces choix, nous avons les matrices de couplages de Yukawa suivantes,

$$\lambda_u = \frac{v}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_c & 0 \\ 0 & 0 & m_t \end{pmatrix}, \quad \lambda_d = \frac{v}{\sqrt{2}} U_{\text{CKM}}^\dagger \begin{pmatrix} m_d & 0 & 0 \\ 0 & m_s & 0 \\ 0 & 0 & m_b \end{pmatrix} U_{\text{CKM}}. \quad (277)$$

Cependant, il nous faut encore déterminer les paramètres réellement physiques de la matrice de CKM. Or, il nous reste la liberté d'effectuer des transformations de phase arbitraires

²⁸Ni d'ailleurs pour les courants neutres, justifiant donc un tel choix.

individuellement pour chacun des quarks de masse définie. Pour n générations de quarks, nous avons ainsi la possibilité de $(2n - 1)$ transformations de phase *relatives* des $(2n)$ champs des quarks de type *up* et *down*, conduisant à une modification de la matrice de CKM, la phase commune à tous ces champs de quarks—n'apparaissant pas dans le Lagrangien de la théorie—étant sans objet. Ainsi, parmi les $2n^2$ paramètres réels de la matrice unitaire de CKM soumis à n^2 conditions d'unitarité, $(2n - 1)$ de ces paramètres peuvent être éliminés de par les transformations de phases relatives des $2n$ champs de quarks, laissant ainsi finalement $(n^2 - 2n + 1)$ paramètres physiques pour la matrice de CKM. Parmi ces paramètres, $n(n - 1)/2$ sont des paramètres angulaires associés à une transformation orthogonale, c'est-à-dire une rotation, tandis que les $(n - 1)(n - 2)/2$ paramètres additionnels sont donc des phases complexes caractérisant la matrice unitaire $U_L^{(d)}$. En particulier, l'existence de telles phases complexes dans les couplages de quarks aux courants chargés conduit à des processus de violation de la symétrie CP .

Ainsi, dans le cas d'une seule génération, aucun angle de mélange ni de phase complexe n'est requis. Dans le cas de deux générations, seul un angle de mélange apparaît dans la matrice de CKM—il s'agit de l'angle de mélange de Cabibbo—mais non une phase de violation de CP . Finalement pour trois générations, nous avons trois angles de mélange et une phase complexe de violation de CP , en terme desquels il est évidemment possible de donner une paramétrisation complète de la matrice de CKM. Par conséquent, le Modèle Standard Minimal avec trois générations de quarks prédit des phénomènes de violation de CP . Cependant, il n'est pas encore établi à l'heure actuelle si les phénomènes de violation de CP observés dans le système des kaons neutres et chargés peuvent s'expliquer uniquement en terme de la phase complexe de la matrice de CKM. Des expériences de violation de CP étudiées dans le système des mésons B pourraient apporter la réponse à cette question.

D'autre part, l'unitarité de la matrice de CKM conduit à d'autres tests du Modèle Standard. En effet, si les relations entre les éléments de cette matrice exprimant son unitarité n'étaient pas respectées, nécessairement le Modèle Standard ne saurait être complet, et il devrait alors exister soit des particules additionnelles, soit des nouvelles interactions, dont les contributions devraient être incluses dans l'évaluation de ces conditions d'unitarité. Afin de donner un exemple simple, il suffirait ainsi qu'il existe une quatrième génération de quarks et leptons pour que la sous-matrice de CKM correspondant aux trois premières générations ne soit plus nécessairement unitaire.

En conclusion, les interactions électrofaibles des courants chargés dans le secteur des quarks conduisent à des phénomènes de mélange des trois saveurs de type *down*, tandis qu'il n'existe pas de nombre quantique conservé associé à chacune de ces saveurs, contrairement au cas des leptons. Le seule symétrie globale qui survit ce mécanisme de mélange est celle du *nombre baryonique* B , prenant la valeur ($B = 1/3$) pour chacun des six quarks.

Ayant compris la caractérisation complète des courants chargés électrofaibles, tournons-nous vers les courants neutres dûs aux couplages aux champs de jauge physiques Z_μ et A_μ définis en (243) en terme des champs de jauge neutres du groupe $SU(2)_L \times U(1)_Y$ à l'aide de l'angle de mélange θ_W . A nouveau, ces courants sont déterminés en considérant les termes suivants apparaissant dans les dérivées covariantes des fermions,

$$W_\mu^3 T^3 + B_\mu \frac{Y}{2}. \quad (278)$$

De cette manière, les contributions correspondantes se séparent en celles des courants électromagnétiques des quarks et leptons et celles des courants neutres électrofaibles. A nouveau, lors de l'évaluation de ces contributions, il faut effectuer les rotations appropriées dans les espaces de saveurs des quarks et leptons de chiralités spécifiques diagonalisant leurs matrices de

masse respectives. Cependant, contrairement au cas des courants chargés, les courants neutres couplent toujours des fermions de *même* chiralité, et par conséquent ces transformations de saveur, agissant sur les fermions de chiralités gauche ou droite séparément, ne contribuent pas aux courants neutres puisqu'elles sont caractérisées par des matrices unitaires. En effet, si nous avons

$$\psi = U_W \psi', \quad (279)$$

où U_W est une matrice unitaire agissant sur une collection de spineurs de Weyl de chiralité définie ψ' , nous avons évidemment la propriété

$$\bar{\psi} \Gamma \psi = \bar{\psi}' \Gamma \psi', \quad (280)$$

pour toute matrice ($\Gamma = (1, \gamma_5, \gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma_5, \sigma^{\mu\nu})$) dans l'algèbre de Clifford-Dirac. Par conséquent, dans le cadre du Modèle Standard, il ne peut exister de courants neutres changeant les saveurs des quarks ou des leptons états propres de masse. Contrairement aux courants chargés, les processus de courants neutres électrofaibles ne sont associés à des changements de saveur²⁹. Expérimentalement, les données existantes concernant de tels processus sont extrêmement contraignantes pour la construction de théories allant au-delà du Modèle Standard Minimal.

Le mécanisme par lequel il n'existe pas (au niveau du Lagrangien non renormalisé) de processus de courants neutres changeant la saveur porte le nom de *mécanisme de GIM*, du nom de Glashow, Iliopoulos et Maiani qui ont montré au 1970 que les limites sur de tels processus nécessitaient alors l'existence du quark c découvert seulement en 1975.

Ces remarques étant faites, un simple calcul permet alors de déterminer les contributions des courants électromagnétiques,

$$\mathcal{L}_{em} = -e A_\mu \bar{F} \gamma^\mu Q F, \quad (281)$$

et des courants neutres électrofaibles,

$$\mathcal{L}_{n.c.} = -\frac{g}{2 \cos \theta_W} Z_\mu \bar{F} \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma_5) F, \quad (282)$$

au Lagrangien du Modèle Standard. Dans ces expressions, F désigne l'ensemble des fermions de Dirac de la théorie, y compris les neutrinos qui se réduisent alors à la composante de chiralité gauche des spineurs correspondants. La charge électrique du positron est définie par,

$$e = g \sin \theta_W = g' \cos \theta_W, \quad (283)$$

tandis que Q désigne l'opérateur de charge électrique de chacun des spineurs F de la théorie. De même, les couplages vectoriels et axiaux des courants neutres sont définis par,

$$g_V = T^3 - 2 \sin^2 \theta_W Q, \quad g_A = T^3, \quad (284)$$

où T^3 désigne donc la troisième composante de l'isospin faible des fermions F . Remarquons que ces couplages vectoriels et axiaux différents pour les courants neutres conduisent à des phénomènes de polarisation et de violation de la parité pour les différents quarks et leptons s'offrant aux tests expérimentaux. En particulier, de tels tests permettent alors la mesure expérimentale de l'isospin faible T^3 des particules ainsi que la mesure de l'angle de mélange des bosons de jauge neutres au travers de $\sin^2 \theta_W$. Cette mesure est indépendante de celle obtenue par la détermination des masses des W^\pm et Z dont le rapport est également lié à cet angle de mélange (voir (246)) et constitue donc un autre test fondamental du Modèle Standard.

²⁹Cette affirmation est valable au niveau du Lagrangien non renormalisé, mais bien évidemment des processus de courants neutres changeant les saveurs existent au travers des corrections radiatives, mais sont alors faibles, en accord avec les données expérimentales.

4.6 Quelques remarques additionnelles

Les sections précédentes ont présenté quelques conséquences physiques et phénoménologiques immédiates de la construction du Modèle Standard Minimal, en particulier dans le secteur électrofaible de la théorie. Historiquement, certaines de ces conséquences ont servi de justification aux divers choix entrant dans la construction de cette théorie, en particulier concernant le groupe de jauge $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$, le couplage des fermions de chiralité gauche uniquement aux bosons chargés, la masse nulle des neutrinos, pour ne citer que quelques exemples. Quelques autres de ces conséquences constituaient des *prédictions* spécifiques du modèle, confirmées expérimentalement depuis, parmi les plus importantes desquelles il est certainement possible de citer la découverte des courants neutres, des quarks c et t —requis de par la cohérence interne sur base de l'existence des quarks s et b —, des bosons W^\pm et Z_0 , et le nombre de neutrinos de masse inférieure à la moitié de celle du Z_0 , ce nombre devant être égal au nombre de générations pour des raisons de cohérence interne de la théorie liées à l'annulation des anomalies de jauge et gravitationnelles. Et finalement, nous avons indiqué quelques conséquences phénoménologiques offrant la possibilité de tester la structure du modèle de manière fondamentale et avec précision. Ces tests sont actuellement poursuivis auprès des grands accélérateurs de physique des hautes énergies, et comprennent la mesure de l'angle de mélange θ_W et des masses de bosons de jauge W^\pm et Z , les couplages chiraux des quarks et leptons, les couplages trilineaires des bosons de jauge, la recherche du scalaire de Higgs neutre, les phénomènes violant les nombres leptoniques tels des masses et angles de mélanges des neutrinos, des nouveaux processus de violation de CP , l'unitarité de la matrice de CKM, etc. De plus, ces divers tests actuellement poursuivis se font avec une précision telle qu'il est également essentiel de tenir compte des corrections radiatives calculées à l'aide du modèle, contribuant ainsi à vérifier sa structure fondamentale même au niveau des fluctuations quantiques qu'il prédit.

Cependant, parmi les nombreuses autres conséquences phénoménologiques, il convient sans doute de mentionner encore quelques autres exemples. Ainsi, un des aspects fondamentalement inscrit dans la construction du Modèle Standard est *l'universalité des interactions faibles*, à savoir que les couplages intervenant dans les désintégrations des muons et des neutrons, par exemple, sont essentiellement identiques. En d'autres mots, il n'existe qu'un seul type d'interaction faible à courant chargé dans la nature, dont les bosons intermédiaires sont les W^\pm . Ce point important peut aisément être illustré sur base des résultats de la section 4.5. La désintégration du muon,

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu, \quad (285)$$

correspond au processus représenté dans la Fig.6a. De même, la désintégration du neutron est due à celle d'un quark d du neutron en un quark u du proton, soit,

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e, \quad d \rightarrow u + e^- + \bar{\nu}_e, \quad (286)$$

un processus représenté dans la Fig.6b. Or, dans chacun de ces deux cas, l'énergie-quantité de mouvement q^μ portée par le boson de jauge intermédiaire W^- est de valeur invariante q^2 très faible devant la masse M_W^2 de ce boson de jauge, permettant ainsi d'approximer le propagateur du W^- uniquement par le facteur $(1/M_W^2)$. Par conséquent, en très bonne approximation, ces deux désintégrations possèdent une amplitude proportionnelle à,

$$\left(\frac{g}{2\sqrt{2}}\right)^2 \frac{1}{M_W^2} = \frac{g^2}{8M_W^2} = \frac{G_F}{\sqrt{2}}, \quad (287)$$

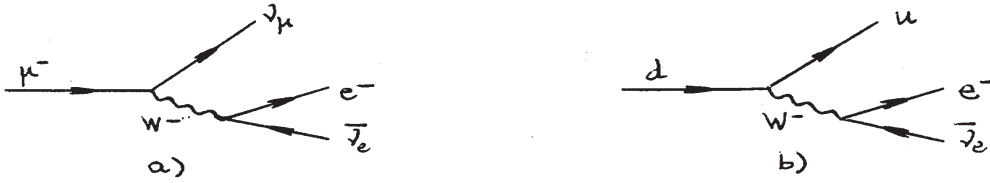


Figure 6: Désintégrations du muon (a) et du neutron (b).

dans le cas du muon, et

$$\left(\frac{g}{2\sqrt{2}}\right)^2 \frac{\cos\theta_c}{M_W^2} = \frac{g^2}{8M_W^2} \cos\theta_c = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \cos\theta_c, \quad (288)$$

dans le cas du neutron, où $\cos\theta_c$ désigne l'angle de Cabibbo de mélange des saveurs u et d des quarks, et G_F est la constante de couplage de Fermi à quatre fermions.

Ainsi, au facteur de l'angle de Cabibbo $\cos\theta_c$ près, ces deux désintégrations possèdent la même intensité, une conséquence parmi d'autres de l'universalité des interactions faibles. Une fois encore, cette propriété d'universalité offre la possibilité de divers tests fondamentaux du Modèle Standard. Par exemple, s'il existait d'autres interactions auxquelles les quarks et les leptons coupleraient de manière différente, alors l'universalité des interactions faibles observée dans les désintégrations des muons et neutrons, par exemple, serait violée.

Il est également intéressant de comparer les intensités des interactions de courants neutres ou chargés. Comme explicité dans la désintégration du muon, le couplage effectif des interactions de courants chargés est

$$\left(\frac{g}{2\sqrt{2}}\right)^2 \frac{1}{M_W^2} = \frac{g^2}{8M_W^2}, \quad (289)$$

tandis que le couplage effectif des interactions de courants neutres est,

$$\left(\frac{g}{2\cos\theta_W}\right)^2 \frac{1}{M_Z^2} = \frac{g^2}{4\cos^2\theta_W M_Z^2}. \quad (290)$$

Par conséquent, le rapport des couplages ou intensités de ces deux types d'interactions détermine également le rapport,

$$\frac{M_W^2}{\cos^2\theta_W M_Z^2} = \rho^2, \quad (291)$$

où ρ est le paramètre défini en (246). Expérimentalement, le rapport des interactions à courants neutres et à courants chargés conduit à une valeur de ρ essentiellement égale à l'unité. Comme indiqué dans la section 4.3, une telle valeur n'est possible que si les scalaires de Higgs non triviaux sous $SU(2)_L$ sont tous des *doublets* (ou sinon, que les valeurs dans le vide de scalaires de Higgs qui ne seraient pas des doublets de $SU(2)_L$ soient considérablement plus petites que celles des doublets de Higgs déterminant la masse des bosons de jauge massifs). Par conséquent, la mesure du rapport de ces types d'interactions électrofaibles conduit à un test de la structure de Higgs du Modèle Standard, ainsi qu'à un test des relations existant dans ce modèle entre M_W , M_Z et $\sin\theta_W$.

Il serait possible de poursuivre ainsi l'énumération de diverses conséquences physiques fondamentales pour le Modèle Standard, mais tel n'est pas l'objet de ces notes. Avant de conclure,

indiquons néanmoins le point important suivant. Tout comme dans le secteur $SU(3)_C$ des interactions fortes, le groupe de jauge $SU(2)_L$ conduit également à des processus physiques médiés par des *instantons* de $SU(2)_L$. Dans le cas des interactions fortes, les instantons conduisent à une brisure quantique de la symétrie axiale $U(1)_A$, expliquant ainsi pourquoi la particule pseudoscalaire η' possède une masse de l'ordre de l'échelle de masse des interactions fortes, contrairement aux autres mésons pseudoscalaires π , K et η dont les masses sont protégées par la symétrie chirale $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$ approximative dont ils sont les pseudo-bosons de Goldstone. De la même manière, dans le cas des interactions électrofaibles trouvant leur origine dans le groupe $SU(2)_L$, les instantons correspondants conduisent à une brisure quantique des nombres baryoniques B et leptoniques individuels et total L —ce dernier étant la somme des trois nombres leptoniques L_e , L_μ et L_τ —, mais d'une telle manière que la combinaison $(B - L)$ reste une symétrie globale exacte de la théorie quantifiée. Par conséquent, la brisure de la combinaison $(B + L)$ conduit à des processus de baryogénèse, mais il n'est pas établi encore de manière définitive si ce mécanisme pourrait conduire ou non à une contribution significative au nombre baryonique de l'univers en cosmologie.

En conclusion, considérons le nombre de paramètres physiques indépendants du Modèle Standard Minimal. Les couplages de jauge sont au nombre de trois, soit g_S , g et g' , pouvant être substitués par exemple par les paramètres physiques,

$$e, \quad \alpha_S = \frac{g_S^2}{4\pi}, \quad \sin \theta_W. \quad (292)$$

Dans le secteur de Higgs, nous avons les paramètres du potentiel de Higgs μ^2 et λ , pouvant être utilement remplacés par la valeur dans le vide du scalaire de Higgs et sa masse,

$$v, \quad m_h. \quad (293)$$

Dans le secteur fermionique, nous avons les neuf masses des trois leptons et six quarks massifs, les trois angles de mélange et la phase complexe violant la symétrie CP de la matrice de mélange de saveurs de quarks de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa. Finalement, à ces dix-huit paramètres, il nous faut encore ajouter deux paramètres de caractère non perturbatif associés aux processus dynamiques induits par les instantons de $SU(3)_C$ et $SU(2)_L$. Ces processus conduisent à des interactions effectives au niveau quantique pouvant être représentées au niveau du Lagrangien de la théorie par

$$\frac{g_S^2}{32\pi^2} \theta_3 \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} G^{a\mu\nu} G^{a\rho\sigma} + \frac{g^2}{32\pi^2} \theta_2 \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} W^{i\mu\nu} W^{i\rho\sigma}. \quad (294)$$

Des valeurs non nulles de ces paramètres sont associées à des observables violant également la symétrie CP , telles par exemple les moments électriques dipolaires de l'électron ou du neutron. Les limites expérimentales actuelles sur ces deux paramètres θ_3 et θ_2 sont extrêmement contraignantes déjà, conduisant au problème de savoir par quel mécanisme ces valeurs sont si faibles. Une solution proposée, dépassant évidemment le cadre du Modèle Standard, est celle du mécanisme de Peccei-Quinn conduisant à la prédiction de nouvelles particules, les *axions*, dont l'existence n'est ni confirmée ni infirmée à l'heure actuelle.

Par conséquent, en incluant ces deux paramètres non perturbatifs θ_3 et θ_2 , le Modèle Standard Minimal compte un total de vingt paramètres physiques, dont seule l'expérience peut déterminer les valeurs numériques.

Parmi ceux-ci, nous avons³⁰,

$$M_W = 80.40 \text{ GeV}/c^2, \quad M_Z = 91.188 \text{ GeV}/c^2, \quad (295)$$

³⁰Pour être complet, il nous faudrait spécifier le schéma de renormalisation dans lequel ces valeurs sont données, mais ceci dépasse le cadre de ces notes.

$$G_F = 1.166 \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2} \quad , \quad \sin^2 \theta_W = 0.2312 \quad , \quad (296)$$

et finalement,

$$v = 247 \text{ GeV} \quad . \quad (297)$$

En particulier, remarquons que la masse du quark t

$$m_t \simeq 172.5 \text{ GeV}/c^2 \quad , \quad (298)$$

correspond à un couplage de Yukawa λ_t de l'ordre de l'unité, c'est-à-dire un couplage pour lequel un traitement en théorie de perturbation pourrait devenir problématique! Cependant, une des questions importantes restant ouverte, au même titre que celle de la masse des neutrinos, est celle de l'existence et de la masse du scalaire de Higgs neutre h .