Cours d'initiation à la physique quantique

MODULE III Année 2007–2008
Annexe Partie II

Sur la Route vers le Modèle Standard des Interactions Fondamentales: En Guise de Boussole pour Encore Deux Années d'Explorations Quantiques et Relativistes

Jan Govaerts

Center for Particle Physics and Phenomenology
Institut de Physique Nucléaire, Université catholique de Louvain
2, Chemin du Cyclotron, B-1348 Louvain-la-Neuve, Belgique
`Jan.Govaerts@fynu.ucl.ac.be`

Le samedi 6 mai 2006

Table des matières

1 Avant-Propos

En guise d'"avertissement", ces quelques pages ne se veulent pas être des notes complètes et pouvant se lire à elles-seules. En réalité, elles servent de soutien au dernier exposé de l'année 2005-2006, la première d'un cycle de trois années consacrées à une introduction aux concepts de la théorie quantique des champs relativistes et des champs de jauge de type Yang-Mills, et comment ceux-ci servent de base à la formulation du Modèle Standard des particules élémentaires et des interactions fondamentales. En particulier, un des objectifs de ce cycle est de comprendre ce qui fait l'essence du célèbre mécanisme de Higgs permettant de rendre compte de la masse des particules élémentaires connues, une des raisons majeures, parmi d'autres, pour la construction du LHC et des détecteurs autour de cet accélérateur unique dans l'histoire humaine.

L'objectif de ces quelques pages, qui doivent donc aussi se lire dans le contexte général des exposés de ces trois années et des notes fournies par ailleurs pour ceux-ci, est de faire le point au terme de cette première année, en s'appuyant sur ce qui a été discuté afin de tracer le chemin vers l'objectif final. En quelque sorte donc dégager un fil rouge pour les deux autres années de ce cycle, pouvant servir de boussole afin de ne pas "perdre le nord" dans les aspects plus abstraits et conceptuels qui seront élaborés lors de ces exposés à venir.

Le contenu de ces quelques pages est donc la réduction à leur plus simple expression des aspects essentiels pour l'objectif final de ce cycle—le mécanisme de Higgs et les théories de Yang-Mills pour les interactions fondamentales—non seulement pour donner les moyens d'un tel compas pour les explorations futures, mais également afin d'établir la nécessité des développements discutés dans les exposés des deux prochaines années. Il est donc même possible que revenir à ces quelques pages au cours de ces deux années soit utile afin de remettre en perspective l'ensemble de la démarche, si jamais l'on venait à se perdre dans les méandres des territoires à explorer.

2 Ce que l'Oscillateur Harmonique nous Apprend

2.1 Champ, onde et oscillateur harmonique classique

S'il est un système fondamental en physique moderne, c'est bien celui des interactions électromagnétiques entre charges électriques et champs électromagnétiques, décrites par l'électrodynamique quantique (QED). Ne fut-ce déjà qu'au niveau classique (non quantifié) du champ électromagnétique solution aux équations de Maxwell de l'électromagnétisme, arrêtons-nous un moment à la question de décrire, dans ses termes les plus réduits possibles, la nature d'une onde électromagnétique, à savoir l'oscillation périodique à la fois dans le temps et dans l'espace de champs électrique et magnétique définis en chaque point de l'espace et couplés l'un à l'autre au travers de ces équations de Maxwell. Simplifiant au maximum, considérons une ces variables en un point particulier de l'espace, et sa variation répétée dans le temps (ou encore, de manière alternative, imaginons que les champs soient homogènes dans l'espace, et ne varient que dans le temps). Il s'agit d'une simplification extrême semble-t-il, et pourtant elle porte en elle déjà les germes de tous les résultats à venir concernant la théorie quantique de champs relativistes.

Ainsi, choisissons de désigner par $x(t)$ ce seul degré de liberté que nous retenons du système, x prenant des valeurs réelles. La dynamique de ce degré de liberté devrait pouvoir s'obtenir au travers du principe variationnel appliqué à une action classique[1] $S[x]$, donnée

[1] Les divers concepts rencontrés et utilisés dans ces quelques pages sont définis dans les exposés des trois

localement dans le temps par une intégrale temporelle d'une fonction de Lagrange $L(x, \dot{x})$,

$$S[x] = \int_{t_i}^{t_f} dt\, L(x(t), \dot{x}(t)) \ . \tag{1}$$

Quel choix faire pour cette fonction de Lagrange? Le plus simple conduisant à une dynamique non triviale serait

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \ , \tag{2}$$

m étant un paramètre physique caractéristique du système dont pourtant la dimension physique, à ce stade, n'a aucune signification physique car la normalisation absolue d'une action, en mécanique classique, ce y compris donc sa dimension physique, n'a aucune signification physique. Cependant, si $x(t)$ représente maintenant la position d'une particule ponctuelle sur un axe rectiligne, la fonction de Lagrange ci-dessus est celle décrivant la dynamique d'une particule non relativiste, libre et de masse m.

Or, sans même en écrire les équations du mouvement, nous savons que toutes les solutions dans ce cas correspondent à un mouvement (rectiligne, sur cette droite!) de vitesse $\dot{x}(t)$ constante, mais en aucun cas à un mouvement d'oscillation. Ce choix de Lagrangien ne correspond donc pas encore à un modèle d'un degré de liberté pouvant osciller de manière périodique dans le temps. Mais le remède au problème est immédiat; il suffit de soustraire un terme d'énergie potentielle harmonique, caractéristique d'un oscillateur harmonique, à la fonction de Lagrange ci-dessus, maintenant de la forme

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \ , \tag{3}$$

$k > 0$ étant la constante de raideur de l'oscillateur et

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \ > \ 0 \tag{4}$$

la fréquence angulaire (ou pulsation) correspondante. Le potentiel harmonique ou parabolique ajouté au système conduit ainsi à une force confinante pour la particule: quelle que soit la solution périodique d'énergie finie obtenue, jamais la masse m ne peut atteindre une distance infinie de l'origine $x = 0$ sur l'axe du mouvement.

Que pouvons-nous ainsi apprendre de ce modèle de l'oscillateur harmonique à une dimension, le système mécanique non trivial le plus simple possible, concernant un champ ondulatoire relativiste et quantique tel le champ électromagnétique?

Les propriétés de l'oscillateur harmonique sont bien connues. Les solutions à son équation du mouvement Lagrangienne (l'équation d'Euler-Lagrange pour $x(t)$)

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 \, x(t) \tag{5}$$

peuvent s'exprimer, par exemple, sous la forme

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}} \left[a \, e^{-i\omega t} \ + \ a^\dagger \, e^{i\omega t} \right] \ , \tag{6}$$

a et $a^\dagger = a^*$ étant deux constantes d'intégration (prenant des valeurs complexes, et complexes conjuguées l'une de l'autre) dont les valeurs sont à déterminer en fonction d'un choix de conditions au bord, ou conditions initiales, pour la construction d'une solution unique à l'équation du mouvement.

années de ce cycle, à commencer avec les formalismes Lagrangien et Hamiltonien de la mécanique classique discutés durant la première année.

Nous savons également que pour ce système, dans sa formulation Hamiltonienne, le moment conjugué $p(t)$ à la coordonnée $x(t)$ correspond à la quantité de mouvement $m\dot{x}(t)$ de la masse m. Par conséquent, les solutions aux équations Hamiltoniennes du système sont comme données ci-dessus pour $x(t)$ tandis que la variable canoniquement conjuguée $p(t)$ s'exprime par

$$p(t) = -\frac{im\omega}{\sqrt{2m\omega}}\left[a\,e^{-i\omega t}\;-\;a^\dagger\,e^{i\omega t}\right]\;. \qquad (7)$$

Et par ailleurs, nous savons que l'Hamiltonien du système, engendrant son évolution temporelle, coïncide dans le cas présent avec l'énergie du système (car le paramètre d'évolution temporelle coïncide avec le temps physique mesuré par t), donnée par

$$E = H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\;. \qquad (8)$$

Afin de vérifier que cette quantité est en effet une constante du mouvement, c'est-à-dire une grandeur conservée quelle que soit la solution considérée à l'équation du mouvement, il suffit d'y substituer les expressions ci-dessus pour les solutions, conduisant à

$$E = \frac{1}{2}\omega\left[a^\dagger\,a\;+\;a\,a^\dagger\right]\;. \qquad (9)$$

Bien évidemment, cette loi de conservation est directement liée à l'existence d'une symétrie dans ce système, en l'occurrence l'invariance de son action sous les translations constantes dans le temps t. En effet, le (premier) théorème de Noether établit une telle relation entre l'invariance de l'action sous un groupe continu de transformations et l'existence de grandeurs conservées pour les solutions aux équations du mouvement. Un autre exemple pourrait être celui de la conservation de la quantité de mouvement du système, lorsque la force appliquée à la particule est identiquement nulle. En présence de la force de rappel du potentiel harmonique, clairement cette loi de conservation n'est pas d'application. Cependant, elle le devient évidemment dans la limite $\omega \to 0$. Et en effet, à nouveau en vertu du (premier) théorème de Noether, si l'action du système est invariante sous les translations constantes des degrés de liberté de configuration (les coordonnées "x"), les moments conjugués associés sont des constantes du mouvement pour les solutions aux équations du mouvement.

En conclusion, ce simple système de l'oscillateur harmonique à une dimension peut servir de modèle classique au comportement dynamique d'un champ ondulatoire, dans la mesure où l'on fait abstraction de la dépendance spatiale de ce champ (cette technique est appelée "réduction dimensionnelle", car on réduit le problème à un nombre de dimensions spatiales plus petit, en l'occurrence ici nul).

2.2 Relations d'incertitude et oscillateur harmonique quantique

Voyons ce qu'il en est maintenant pour le système quantifié. Les principes de la quantification sont tels qu'aux degrés de liberté de configuration x et leurs moments canoniquement conjugués p correspondent cette fois des opérateurs linéaires agissant sur l'espace des états quantiques du système, $\hat{x}$ et $\hat{p}$, respectivement. En général de tels opérateurs ne commutent pas, et leurs règles de commutation sont données par l'algèbre de Heisenberg

$$\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = [\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \quad , \quad \hat{x}^\dagger = \hat{x} \quad , \quad \hat{p}^\dagger = \hat{p}\;. \qquad (10)$$

Par ailleurs, l'évolution dynamique du système reste engendrée par son Hamiltonien H, mais cette fois comme opérateur linéaire $\hat{H}$ apparaissant dans l'équation de Schrödinger abstraite

$$\hat{H}\,|\psi, t\rangle = i\hbar\frac{d}{dt}|\psi, t\rangle\;, \qquad (11)$$

à savoir dans le cas de l'oscillateur harmonique

$$\left[\frac{1}{2m}\hat{p}^2\;+\;\frac{1}{2}m\omega^2\,\hat{x}^2\right]|\psi,t\rangle=i\hbar\frac{d}{dt}|\psi,t\rangle\ . \tag{12}$$

En particulier les états quantiques associés à une énergie bien définie E sont caractérisés par le problème aux valeurs propres suivant

$$\hat{H}|\psi\rangle=E|\psi\rangle\quad,\quad|\psi,t\rangle=e^{-\frac{i}{\hbar}t\,E}\,|\psi\rangle\ . \tag{13}$$

Dans ces diverses expressions, $\hbar=h/(2\pi)$ désigne la constante (normalisée) de Planck de la mécanique quantique, tandis que $|\psi,t\rangle$ dénote un état quantique quelconque du système.

En réalité, la structure algébrique abstraite définie par les règles de commutation de Heisenberg doit donc être réalisée ou représentée par l'espace des états quantiques: il s'agit d'un problème purement "cinématique", indépendant de la dynamique associée à $\hat{H}$. Cet espace de représentation doit être un espace vectoriel sur les nombres complexes équipé d'un produit interne hermitien, permettant ainsi de définir les recouvrements de divers états quantiques correspondant aux amplitudes de probabilité, dont les normes carrées définissent finalement les probabilités quantiques du système. Si cet espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ était de dimension finie, les opérateurs linéaires seraient alors représentés par des matrices finies, une fois une base spécifiée dans cet espace vectoriel. Cependant en mécanique quantique habituellement les espaces vectoriels rencontrés ne possèdent pas une dimension finie: celle-ci est soit discrète infinie voire même non dénombrable, correspondant en principe à ce qui est appelé des espaces de Hilbert. C'est le cas de l'algèbre de Heisenberg. En effet, si cette algèbre possédait une représentation de dimension finie, les opérateurs $\hat{x}$ et $\hat{p}$ pourraient être représentés par des matrices carrées de dimension finie, avec comme conséquence pour la trace de leur relation de commutation ci-dessus,

$$\mathrm{tr}\,[\hat{x},\hat{p}]=\mathrm{tr}(\hat{x}\hat{p})\;-\;\mathrm{tr}(\hat{p}\hat{x})=i\hbar\,\mathrm{tr}\,\mathbb{1}=i\hbar\,N\ , \tag{14}$$

N étant la dimension de l'espace vectoriel. Or dans le cas de matrices (de dimension finie), la trace est une opération cyclique, à savoir $\mathrm{tr}(\hat{x}\hat{p})=\mathrm{tr}(\hat{p}\hat{x})$, conduisant ainsi à une contradiction. Force est de conclure que l'algèbre de Heisenberg ne peut être représentée que sur un espace de dimension infinie, soit dénombrable, soit non dénombrable.

Le but ici n'étant pas une discussion détaillée de ces considérations, poursuivons plutôt une voie "au plus court", en imaginant qu'un espace de représentation possible le soit en terme de fonctions complexes $\psi(x)$ définies sur $\mathbb{R}$ et prenant leurs valeurs dans $\mathbb{C}$, sur lesquelles l'action des opérateurs abstraits $\hat{x}$ et $\hat{p}$ soit définie par les opérations fonctionnelles suivantes:

$$\hat{x}\ :\quad x\psi(x)\quad;\quad\hat{p}\ :\quad -i\hbar\frac{d\psi(x)}{dx}\ . \tag{15}$$

Il est alors immédiat de vérifier que ces deux opérations obéissent en effet à l'algèbre de Heisenberg. Nous avons ainsi la représentation dite "par fonction d'onde dans l'espace de configuration". En particulier, le produit interne de deux états quantiques $|\psi\rangle$ et $|\varphi\rangle$, représentés par leurs fonctions d'onde complexes $\psi(x)$ et $\varphi(x)$, respectivement, est défini par l'intégrale

$$\langle\psi|\varphi\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\,\psi^*(x)\,\varphi(x)\ . \tag{16}$$

Dans cette représentation spécifique de l'algèbre de Heisenberg, l'équation de Schrödinger abstraite s'écrit également, dans le cas de l'oscillateur harmonique,

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\;+\;\frac{1}{2}m\omega^2\,x^2\right]\,\psi(x,t)=i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}\ , \tag{17}$$

$\psi(x,t)$ désignant la fonction d'onde complexe dépendante du temps décrivant l'état quantique du système. En particulier, les états d'énergie bien définie sont associés au problème aux valeurs propres suivant

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\,+\,\frac{1}{2}m\omega^2\,x^2\right]\,\psi(x)=E\,\psi(x)\quad,\quad\psi(x,t)=e^{-\frac{i}{\hbar}t\,E}\,\psi(x)\;. \tag{18}$$

Plutôt que de vouloir résoudre ici ce problème de manière exhaustive, inspirons-nous de la relation d'incertitude de Heisenberg bien connue

$$\Delta x\,\Delta p\geq\,\frac{1}{2}\hbar\;, \tag{19}$$

Δx et Δp mesurant les (racines carrées des) valeurs moyennes (des carrés) des écarts de $\hat{x}$ et $\hat{p}$ à leurs valeurs moyennes pour un état quantique considéré. Or, l'expression de l'énergie de l'oscillateur peut encore s'écrire

$$E=\frac{1}{2}\left(\frac{p}{\sqrt{m}}\right)^2\,+\,\frac{1}{2}\left(\omega\sqrt{m}x\right)^2\;. \tag{20}$$

En raison de la symétrie de cette expression entre les variables x et p ainsi normalisées, les états propres d'énergie doivent être associés à une équipartition de l'énergie totale dans ces deux formes cinétique et potentielle. De plus, l'état d'énergie minimale doit aussi être celui qui sature la relation d'incertitude. Puisque cette dernière s'exprime encore sous la forme

$$\left(\omega\sqrt{m}\Delta x\right)\,\left(\frac{\Delta p}{\sqrt{m}}\right)\,\geq\,\frac{1}{2}\hbar\omega\;, \tag{21}$$

l'hypothèse d'équipartition des deux formes d'énergie se traduit par

$$\omega\sqrt{m}\Delta x=\frac{\Delta p}{\sqrt{m}}\geq\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}\;, \tag{22}$$

conduisant ainsi à la valeur de l'énergie minimale possible lorsque la relation d'incertitude est saturée,

$$E_0=\frac{1}{2}\hbar\omega\;. \tag{23}$$

L'état quantique dont l'énergie prend cette valeur doit donc correspondre à une onde stationnaire située au fond du puits de potentiel parabolique de l'oscillateur harmonique, ne possédant aucun noeud et un ventre unique. Ce même potentiel confinant implique que les états propres d'énergie de valeurs supérieures doivent de même correspondre à des ondes stationnaires dont les nombres de noeuds et de ventres vont croissant, engendrant ainsi une suite discrète infinie d'états propres d'énergie associés à diverses excitations de l'oscillateur harmonique. Il serait intéressant de calculer ce spectre d'énergie.

La relation d'incertitude donnant déjà l'énergie de l'état fondamental, $E_0=\hbar\omega/2$, il ne reste plus qu'à considérer l'équation de Schrödinger pour cette valeur propre. Cette équation se réduit alors à l'expression

$$\frac{d^2\psi_0(x)}{dx^2}=\left[\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^2x^2-\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)\right]\psi_0(x)\;. \tag{24}$$

La solution est nécessairement de la forme

$$\psi_0(x)=N_0\,e^{-\frac{1}{2}\alpha x^2}\;, \tag{25}$$

N_0 étant un facteur de normalisation, et α un paramètre à déterminer. Substituant cet *ansatz* dans l'équation ci-dessus, il suit que nécessairement

$$\alpha = \frac{m\omega}{\hbar} \ , \tag{26}$$

tandis que le facteur de normalisation N_0 est fixé par la condition[2]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \, |\psi(x)|^2 = 1 \ . \tag{27}$$

Ainsi finalement

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \ e^{-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2} \ . \tag{28}$$

Connaissant la fonction d'onde de l'état fondamental, il devient possible de procéder de proche en proche. Le premier état excité doit posséder un seul noeud nécessairement en $x = 0$. Aussi sa fonction d'onde doit-elle être de la forme

$$\psi_1(x) = N_1 \, x \, e^{-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2} \ , \tag{29}$$

le facteur de normalisation N_1 étant donné par

$$N_1 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \ \sqrt{2}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \ . \tag{30}$$

Par simple substitution dans l'équation de Schrödinger, on vérifie en effet que cette fonction d'onde définit un état propre d'énergie de valeur propre

$$E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega = \hbar\omega\left(1 + \frac{1}{2}\right) \ , \tag{31}$$

avec donc pour la fonction d'onde normalisée

$$\psi_1(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \ \sqrt{2}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \, x \, e^{-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2} \ . \tag{32}$$

Il serait possible de poursuivre une telle analyse en multipliant le facteur gaussien de $\psi_0(x)$ par des polynomes pairs et impairs d'ordre croissant dont les coefficients sont à déterminer par substitution dans l'équation de Schrödinger. Cependant, cette méthode devient rapidement fort technique, conduisant à la construction des polynomes d'Hermite. A titre de dernière illustration, considérons le deuxième état excité, pour lequel la fonction d'onde doit être de la forme

$$\psi_2(x) = N_2 \left[\alpha x^2 - \beta\right] \ e^{-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2} \ , \tag{33}$$

N_2, α et β étant des paramètres réels à déterminer. Par substitution dans l'équation de Schrödinger aux valeurs propres, il s'avère au terme d'un calcul de quelques lignes qu'un tel état correspond nécessairement à la valeur propre d'énergie suivante

$$E_2 = \frac{5}{2}\hbar\omega = \hbar\omega\left(2 + \frac{1}{2}\right) \ , \tag{34}$$

tandis que les coefficients α et β sont liés par la relation

$$\alpha = 2\frac{m\omega}{\hbar}\,\beta \ , \tag{35}$$

[2]On rappelle le résultat $\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\pi/\alpha}$.

alors que le facteur N_2 reste indéterminé car lié à la normalisation de la fonction d'onde $\psi_2(x)$. Absorbant alors le facteur β non nul dans le facteur de normalisation N_2, et calculant ce dernier, il suit finalement que la fonction d'onde normalisée du deuxième état excité de l'oscillateur harmonique est donnée par

$$\psi_2(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[2\frac{m\omega}{\hbar}x^2 - 1\right] e^{-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2} \ . \tag{36}$$

En réalité, il existe une technique fort efficace de diagonalisation purement algébrique et abstraite de l'Hamiltonien de l'oscillateur harmonique en l'exprimant en terme des opérateurs suivants

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left[\hat{x} + \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right] \quad , \quad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left[\hat{x} - \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right] \ , \tag{37}$$

dont la définition est à mettre en parallèle avec les solutions classiques pour $x(t)$ et $p(t)$ rappelées plus haut, et qui engendrent l'algèbre de Fock,

$$\left[a, a^\dagger\right] = \mathbb{1} \ . \tag{38}$$

Mais ceci n'est pas le propos de ces notes.

De fait, le spectre d'énergie de l'oscillateur harmonique est ainsi complètement donné par

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \cdots \ . \tag{39}$$

Associé à chacun de ces états, il y a en effet équipartition des énergie cinétique et potentielle, avec

$$\Delta x_n = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}\left(n + \frac{1}{2}\right)} \quad , \quad \Delta p_n = \sqrt{\hbar m\omega \left(n + \frac{1}{2}\right)} \quad , \quad \Delta x_n \, \Delta p_n = \hbar \left(n + \frac{1}{2}\right) \ , \tag{40}$$

représentant le fait que les fonctions d'onde correspondantes définissent des ondes stationnaires dans le puits de potentiel harmonique dont le nombre de noeuds et de ventres va croissant avec n.

Mais la leçon principale à retirer de cette discussion est qu'en quantifiant ce modèle fort simple et harmonique d'un système oscillant, nous obtenons une infinité d'états quantiques chacun d'énergie bien définie—ce qui est possible puisque l'énergie de ce système est une grandeur conservée—et appartenant à une suite discrète d'états dont les différences d'énergie sont toutes identiques et données par $\hbar\omega$, ω étant la fréquence angulaire propre de ce système oscillant, et $\hbar$ la constante fondamentale de la mécanique quantique. L'état d'énergie fondamentale ne possède pas une énergie nulle, en raison de la relation d'incertitude, à savoir essentiellement une forme d'énergie associée aux fluctuations quantiques du vide; en tout cas, c'est ainsi que cette énergie quantique de l'état d'énergie minimale est habituellement appelée, bien que dans le cadre de la mécanique non relativiste, qu'elle soit classique ou quantique, l'énergie totale d'un système ne reste jamais définie qu'à une constante additive près, pouvant être choisie librement.

Passer d'un état quantique à un autre correspond donc à exciter ou absorber un certain nombre de ces quanta tous de même énergie $\hbar\omega$ pour une fréquence angulaire donnée ω. Le système peut donc exister dans une quelconque superposition d'un nombre arbitraire de quanta identiques. Faire le pas d'identifier de tels quanta à des particules ne nécessite plus qu'un ingrédient, à savoir pouvoir également parler de leur quantité de mouvement, ce qui nécessite la notion de translation dans l'espace, degré de liberté dont nous ne disposons pas pour le moment ayant appliqué cette réduction d'un champ à un seul degré de liberté oscillant dans le temps en s'affranchissant de sa dynamique ondulatoire dans l'espace. Nous y reviendrons plus loin.

3 Oscillateur Harmonique et Symétrie

3.1 Oscillateur sphérique et symétrie SU(2)

Bien sûr le champ électrique (ou magnétique) qui nous sert de motivation pour les présentes considérations ne correspond pas simplement à un seul nombre défini en un point de l'espace et oscillant au cours du temps, mais en réalité à une grandeur vectorielle définie en chaque point de l'espace et oscillant dans le temps. Afin de rendre compte un tant soit peu de cet aspect des choses, considérons maintenant non plus un oscillateur harmonique à une dimension, mais deux oscillateurs harmoniques identiques oscillant dans deux directions perpendiculaires. En d'autres termes, considérons l'oscillateur harmonique isotrope ou à symétrie sphérique dans le plan euclidien, à deux dimensions, de coordonnées $x(t)$ et $y(t)$, de masse m et de fréquence angulaire ω (il s'agit donc en effet de la superposition de deux oscillateurs harmoniques à une dimension chacun possédant les mêmes masses et fréquences angulaires). La dynamique de ce système dérive donc d'une action dont la fonction de Lagrange s'écrit simplement comme la somme des deux fonctions de Lagrange correspondant à chaque degré de liberté,

$$L = \frac{1}{2}m\left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right] - \frac{1}{2}m\omega^2\left[x^2 + y^2\right] \ . \tag{41}$$

Il serait possible d'expliciter les équations du mouvement et leurs solutions, aussi bien dans le formalisme Lagrangien que Hamiltonien, pour ces deux oscillateurs. Cependant, il devrait être clair que les deux oscillateurs peuvent se déplacer l'un indépendamment de l'autre, la composition de ces deux mouvements indépendants conduisant à une certaine trajectoire dans le plan (x, y). Cependant, puisque les deux fréquences angulaires sont identiques, nécessairement les trajectoires obtenues doivent toujours se refermer sur elles-mêmes après une période qui est identique pour chaque oscillateur. En d'autres termes, en fonction des conditions initiales pour chaque oscillateur, en général les trajectoires obtenues sont des ellipses dans le plan (x, y), correspondant à des excitations indépendantes de chaque oscillateur. Par exemple, seul l'oscillateur $x(t)$ peut être excité, conduisant aux solutions discutées plus haut, sans que l'oscillateur $y(t)$ ne le soit, $y(t) = 0$. Les deux oscillateurs $x(t)$ et $y(t)$ sont donc découplés, définissant ce qui est appelé “deux modes propres de vibration” du système. Inutile de nous attarder ici sur de telles considérations, qui devraient être essentiellement évidentes sur base de la discussion de l'oscillateur harmonique à une dimension rappelée plus haut.

Ce découplage entre les deux modes de vibration reste donc également valable pour le système quantifié. Aussi, le spectre d'énergie de l'oscillateur x est-il donné par

$$E^{(x)}_{n_x} = \hbar\omega\left(n_x + \frac{1}{2}\right) \quad , \quad n_x = 0, 1, 2, \cdots \ , \tag{42}$$

tandis que celui de l'oscillateur y l'est par

$$E^{(y)}_{n_y} = \hbar\omega\left(n_y + \frac{1}{2}\right) \quad , \quad n_y = 0, 1, 2, \cdots \ . \tag{43}$$

Les états quantiques du système d'énergie bien définie sont donc obtenus par la superposition de ces deux types d'états quantiques, et dont les fonctions d'onde sont tout simplement données par le produit des fonctions d'onde en x et y associées. Par conséquent, la quantification de l'énergie totale du système s'exprime par la relation

$$E(n_x, n_y) = \hbar\omega\left(n_x + n_y + 1\right) \ . \tag{44}$$

Il apparaît dans ce spectre une structure nouvelle, en comparaison au spectre de l'oscillateur harmonique à une dimension, à savoir l'existence de dégénérescences. En effet, à l'exception du fondamental avec $n_x = 0 = n_y$ et une énergie $E(0,0) = \hbar\omega$ (la somme des énergies quantiques du vide des oscillateurs x et y), pour chacun des autres niveaux d'énergie il existe au moins deux états quantiques distincts partageant cette valeur de l'énergie totale. Pour le niveau d'énergie $E = \hbar\omega(n+1)$ avec $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$, le nombre d'états ainsi dégénérés est donné par le nombre de partitions en deux naturels du naturel n: un problème d'arithmétique pure et de combinatoire surgissant en physique quantique! La solution à ce problème est immédiate. Pour une valeur donnée de $n = 0, 1, 2, \cdots$, il existe $(n+1)$ paires de nombres (n_x, n_y) tels que $n_x + n_y = n$.

Mais quelle est l'origine de cette dégénérescence? Notons que si nous écrivons $n = 2j$ avec j entier ($j = 0, 1, 2, \cdots$) si n est pair, et j demi-entier ($j = 1/2, 3/2, 5/2, \cdots$) si n est impair, la suite des états quantiques dégénérés (n_x, n_y) peut être mise en relation avec la suite de nombres $(-j, -j+1, -j+2, \cdots, j-2, j-1, j)$. Sous cette forme, cette suite devrait rappeler les états de projection de spin possibles $m_{\rm spin}$ pour une particule de spin j. Précisément les représentations du groupe SU(2) de spin, associé au groupe SO(3) des rotations à trois dimensions! Comment de telles structures peuvent-elles apparaître dans ce système si simple d'un oscillateur isotrope à deux dimensions?

Notons qu'en raison de l'isotropie de l'oscillateur, en réalité le système est invariant sous les rotations dans le plan. En effet, introduisant le vecteur $\vec{x}$ dont les composantes cartésiennes sont les coordonnées (x, y) du système, la fonction de Lagrange s'écrit encore

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^{\,2} - \frac{1}{2} m\omega^2 \vec{x}^{\,2} \ . \tag{45}$$

Cette forme rend manifeste l'invariance sous les rotations du système dans son plan de configuration. Ce groupe de rotation correspond au groupe orthogonal SO(2) qui lui-même coïncide avec le groupe U(1) des transformations de phase dans le plan complexe[3]. Et en vertu du (premier) théorème de Noether, il suit donc une loi de conservation, en l'occurrence celle de la conservation du moment angulaire du système (perpendiculaire au plan de son mouvement). Cependant, ceci n'explique pas encore la symétrie plus large SU(2) apparaissant dans le spectre quantique décrit ci-dessus. Pour cela, il faut considérer de manière plus détaillée la formulation Hamiltonienne de ce système, en terme des grandeurs

$$\vec{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2}} \left[\vec{x} + \frac{i}{m\omega} \vec{p} \right] \quad , \quad \vec{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2}} \left[\vec{x} - \frac{i}{m\omega} \vec{p} \right] \ , \tag{46}$$

$\vec{p}$ étant bien sûr les moments conjugués aux degrés de liberté de configuration $\vec{x}$. L'Hamiltonien du système s'écrit alors

$$H = \frac{1}{2} \omega \left[\vec{a}^\dagger \cdot \vec{a} \ + \ \vec{a} \cdot \vec{a}^\dagger \right] \ . \tag{47}$$

Il est clair maintenant que toute transformation unitaire de SU(2) définie par une matrice 2×2 U telle que

$$U^\dagger = U^{-1} \quad , \quad \det U = 1 \ , \tag{48}$$

et agissant comme

$$\vec{a}\,' = U \vec{a} \quad , \quad \vec{a}\,'^\dagger = \vec{a}^\dagger \, U^\dagger \ , \tag{49}$$

engendre en effet une symétrie du système et, en particulier, laisse son spectre invariant.

[3]En effet, on pourrait également exprimer la dynamique du système en terme de la variable complexe $z = (x + iy)/\sqrt{2}$, ce que nous faisons dans la Sect.4.

Ainsi, en ayant élargi l'espace de configuration de l'oscillateur harmonique tout en ayant soin d'inclure la symétrie d'isotropie, il suit que l'espace des états quantiques possède des dégénérescences trouvant leur origine dans cette symétrie SU(2), les transformations de cette symétrie reliant les états ainsi dégénérés. L'espace des états quantiques fournit une représentation non seulement de l'algèbre de Heisenberg caractéristique de la quantification de tout système dynamique, mais également une représentation des diverses symétries "internes" pouvant exister dans le système (les symétries "externes" étant liées aux symétries de l'espace et du temps; dans le cas présent seule la symétrie de translation dans le temps est présente, associée à la conservation de l'énergie des états quantiques).

En particulier, chacun des états quantiques du système est, outre par son énergie, caractérisé encore par ses nombres quantiques sous les symétries du système. En l'occurrence, un état associé aux naturels (n_x, n_y) est caractérisé non seulement par son énergie $E(n_x, n_y) = \hbar\omega(n_x + n_y + 1)$, mais également par sa projection de "spin interne" sous la symétrie SU(2) liée[4] à la valeur de $(n_x - n_y)$. Ces deux nombres à la fois caractérisent ainsi de manière unique chacun des états quantiques d'énergie bien définie. Mais puisque chaque état quantique peut être considéré comme une superposition unique de quanta de type x et y, il suit que ces quanta eux-mêmes possèdent des valeurs bien spécifiques pour ces deux symétries, à savoir en terme de leur énergie et de leurs propriétés sous la symétrie[5] SU(2).

3.2 Battements et interactions

Les diverses propriétés de l'oscillateur isotrope à deux dimensions discutées ci-dessus sont directement liées à l'existence de cette symétrie sphérique sous les rotations dans le plan de configuration. Qu'arrive-t-il si cette symétrie est explicitement brisée dans la dynamique? Ajoutons par exemple le terme suivant dans la fonction de Lagrange du système

$$L = \frac{1}{2}m\left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right] - \frac{1}{2}m\omega^2\left[x^2 + y^2\right] - m\omega^2\,\alpha\,xy\ , \tag{50}$$

où α est un paramètre réel arbitraire sans dimension physique, choisi tel que $-1 < \alpha < 1$ de manière à ce que l'énergie potentielle totale du système reste bornée inférieurement pour toutes les configurations du système (sinon l'énergie totale pourrait être arbitrairement négative, conduisant à un système instable).

Ce faisant les deux oscillateurs x et y ne sont plus découplés l'un de l'autre. Si l'un est excité, l'autre l'est aussi, conduisant à des phénomènes de battement entre les deux degrés de liberté x et y, à savoir ces deux oscillateurs. Dans le contexte quantique, cela se traduit nécessairement par le fait que si des quanta de type x sont excités, une excitation des quanta y

[4] En réalité, la situation est un peu plus subtile que ceci, car les générateurs de la symétrie SU(2) ne sont pas diagonaux dans la base des opérateurs $\vec{a}$ et $\vec{a}^\dagger$ introduite ci-dessus. Il faut en fait diagonaliser à la fois l'Hamiltonien et la symétrie SU(2) dans une autre base de l'algèbre des degrés de liberté afin de mettre en évidence de manière directe et complète la caractérisation en terme de représentations de SU(2) de "spin" j bien défini, lié à la valeur de $n = 2j$ déterminant le niveau d'énergie $E(n) = \hbar\omega(n+1)$, l'ensemble des états quantiques ainsi dégénérés en énergie. En particulier, le moment angulaire du système est quantifié en unités de $\hbar$, avec les états quantiques du niveau d'énergie associé à $n = 2j$ possédant chacun une des valeurs de moment angulaire comprise entre $(-2j\hbar)$ et $(+2j\hbar)$. Cette valeur du moment angulaire vaut deux fois celle de la projection du "spin" SU(2) dans la classification ci-dessus en terme de représentations de cette symétrie du système. Ces détails sont disponibles dans certaines des notes de cours mises à disposition pour ce cycle de trois années.

[5] Dans le cadre de la théorie des champs, cette discussion se traduit par le fait que pour un champ complexe, il existe des quanta possédant une charge U(1) de signes opposés, à savoir des particules et des antiparticules. Un résultat riche en signification et en conséquences physiques, et qui trouve son origine dans l'existence de la symétrie de phase U(1)=SO(2) d'un champ complexe.

doit apparaître, et vice-versa, traduisant en terme d'énergie quantifiée le même phénomène de battement que celui si familier de systèmes oscillants en mécanique classique.

En d'autres termes, en ajoutant dans la fonction de Lagrange des termes multipliant entre eux les degrés de liberté d'oscillateurs découplés, on assiste à des interactions—des échanges d'énergie—entre les divers oscillateurs. Afin d'introduire des interactions entre quanta, il suffit de multiplier leurs degrés de liberté dans leur fonction de Lagrange. Mais notons que ce faisant, nous perdons également la symétrie SU(2) discutée plus haut, et que par conséquent la dégénérescence des niveaux d'énergie doit également être levée par le terme d'interaction. Il est même permis de prendre le point de vue en quelque sorte inverse. C'est la symétrie SU(2) qui dans le cas précédent protège les interactions entre les deux types de quanta, alors que si cette symétrie n'est plus présente, une telle "protection" disparaît et en effet, puisque en physique rien de ce qui n'est pas explicitement interdit peut avoir et a donc lieu, les deux types de quanta peuvent alors se mettre à interagir.

Mais considérons cette situation un peu plus en détail. Bien que le terme additionnel brise la symétrie de rotation dans le plan d'oscillation, il n'en reste pas moins que les équations du mouvement sont encore linéaires, et peuvent donc encore être diagonalisées en terme de deux modes de vibration propres, c'est-à-dire découplés et chacun avec sa fréquence angulaire propre. Cependant, pour autant que $\alpha \neq 0$, ces deux fréquences ne peuvent plus être dégénérées, levant ainsi également la dégénérescence du spectre quantique d'énergie. La manière la plus efficace de mettre les deux modes normaux en évidence est de diagonaliser la fonction de Lagrange.

Introduisons les combinaisons

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[x(t) + y(t)\right] \quad , \quad v(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[x(t) - y(t)\right] \ . \tag{51}$$

Inversant ces deux relations et substituant dans la fonction de Lagrange, il suit

$$L = \frac{1}{2}m\dot{u}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2(1+\alpha)u^2 + \frac{1}{2}m\dot{v}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2(1-\alpha)v^2 \ . \tag{52}$$

Par conséquent, les combinaisons $u(t)$ et $v(t)$ des deux degrés de liberté initiaux définissent les deux modes propres découplés de ce système. Celui associé à $u(t)$ est caractérisé par une fréquence propre $\omega\sqrt{1+\alpha}$, et celui associé à $v(t)$ par une fréquence propre[6] $\omega\sqrt{1-\alpha}$. L'Hamiltonien du système est donc également diagonal dans ces deux modes propres. Et en particulier le spectre d'énergie quantique s'écrit maintenant

$$E(n_u, n_v) = \hbar\omega\sqrt{1+\alpha}\left[n_u + \frac{1}{2}\right] + \hbar\omega\sqrt{1-\alpha}\left[n_v + \frac{1}{2}\right] \quad , \quad n_u, n_v = 0, 1, 2, 3, \cdots \ . \tag{53}$$

Et en effet ce spectre ne possède plus de dégénérescence dès que $\alpha \neq 0$.

Notons que le phénomène de battement classique est aisément identifié à partir de ces relations. Imaginons par exemple que les conditions initiales soient telles que $y(t=0) = 0$ et $\dot{y}(t=0) = 0$, tandis que $x(t=0)$ et $\dot{x}(t=0)$ prennent des valeurs arbitraires. Bien que seul l'oscillateur x soit ainsi initialement excité, il est clair que de telles conditions initiales se traduisent en des conditions initiales non triviales pour chacun des deux modes propres d'oscillation du système $u(t)$ et $v(t)$, de ce fait excitant ces deux modes. Leurs fréquences étant différentes, au cours du temps l'énergie totale du système se trouve tantôt en majorité dans le mode x ou dans le mode y, à savoir le phénomène de battement (il est bien sûr possible

[6]Notons que lorsque $|\alpha| > 1$, l'une de ces deux fréquences devient imaginaire pure, signalant l'instabilité du mode propre correspondant avec un potentiel harmonique alors inversé, comme mentionné plus haut.

d'exprimer la solution générale aux équations du mouvement de ce système, et constater analytiquement l'expression mathématique précise de ces diverses remarques et propriétés physiques). Au niveau quantique, de telles conditions initiales se traduisent par une interférence entre diverses composantes d'énergies bien définies mais distinctes présentes dans la fonction d'onde du système. Cependant, dans la base des degrés de libertés u et v, la résolution de la dynamique quantique du système est factorisée dans ces deux secteurs d'oscillation.

En conclusion, introduire des interactions entre quanta s'obtient aisément en multipliant dans la fonction de Lagrange du système divers degrés de liberté entre eux, conduisant à des phénomènes analogues à ceux de battement, et se traduisant en effet par des transferts réciproques d'énergies entre divers quanta. Dans le cas de l'interaction considérée ici, celle-ci offre l'avantage d'encore conduire à une solution analytique complète et explicite même pour le système quantifié, à condition de se placer dans la base des modes normaux de vibration du système classique. Ainsi les quanta découplés sont-ils immédiatement identifiés, mais ceux-ci correspondent à des superpositions quantiques des quanta du système en l'absence des interactions.

4 Oscillateur Sphérique et Brisure de Symétrie

4.1 Oscillateur anharmonique sphérique

Ayant compris comment des interactions sont introduites en multipliant les degrés de liberté entre eux dans la fonction de Lagrange, voyons s'il est possible d'en introduire tout en préservant cette fois la symétrie de rotation dans le plan de configuration de l'oscillateur. Pour cela, il nous faut *a priori* modifier l'énergie potentielle du système tout en préservant l'invariance sous les rotations dans le plan, et donc exprimer ces termes additionnels en terme de $\vec{x}^{\,2}$. Puisque cette énergie potentielle doit rester bornée inférieurement, le choix le plus simple consiste à considérer maintenant l'oscillateur anharmonique quartique dont la fonction de Lagrange est donnée par

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^{\,2} - \frac{1}{2}m\omega^2\,\vec{x}^{\,2} \, - \frac{1}{4!}m\lambda\left(\vec{x}^{\,2}\right)^2 \ , \tag{54}$$

où $\lambda > 0$ est un paramètre physique réel de dimensions physiques appropriées.

Pour ce système, il n'est pas possible de construire des solutions analytiques exactes aux équations du mouvement. Cependant, pour des valeurs de $|\vec{x}\,|$ suffisamment petites telles que la contribution quadratique à l'énergie potentielle totale domine sur celle quartique, correspondant à la condition

$$|\vec{x}| \ll 2\sqrt{\frac{3\omega^2}{\lambda}} \ , \tag{55}$$

il est clair qu'au voisinage de $(x, y) = (0, 0)$ en bonne approximation le système possède des modes d'oscillations quasi-harmoniques de fréquence angulaire ω, cette fréquence étant modifiée pour des amplitudes d'oscillation croissantes. L'échelle de temps ou l'échelle de périodicité pour les mouvements de petites oscillations est déterminée par le terme quadratique de l'énergie potentielle. C'est donc la courbure parabolique au voisinage d'un minimum d'une énergie potentielle qui détermine, en première approximation, les fréquences d'oscillations des modes de vibration d'un système mécanique.

Dans le cas présent, pour autant que le paramètre ω^2 reste strictement positif, le point $\vec{x} = \vec{0}$ détermine en effet le minimum absolu de cette énergie potentielle totale

$$V(\vec{x}\,) = \frac{1}{2}m\omega^2\vec{x}^{\,2} + \frac{1}{4!}m\lambda\,\left(\vec{x}^{\,2}\right)^2 \ . \tag{56}$$

Lorsque $\omega^2 = 0$, cette énergie potentielle est essentiellement constante au voisinage de $\vec{x} = \vec{0}$, impliquant que les trajectoires du système dans le plan sont essentiellement celle d'une particule libre, pour autant que la distance ne soit pas trop grande, l'échelle de distance étant cette fois fonction de λ et de l'énergie cinétique T du système,

$$|\vec{x}| \ll \left(\frac{24T}{m\lambda}\right)^{1/4} \ . \tag{57}$$

Mais que se passe-t-il lorsque le paramètre ω^2 devient négatif?

4.2 Instabilité et brisure spontanée de symétrie

Dans ce cas, l'énergie potentielle reste parabolique au voisinage de $\vec{x} = \vec{0}$, mais avec une courbure négative! Ce point n'est plus un minimum mais un maximum local de l'énergie potentielle, un point d'équilibre instable pour le système! Placé en une telle configuration, la moindre perturbation va conduire à une "désintégration" de sa configuration en une autre, dynamique, conduisant à une conversion de son énergie potentielle totale en $\vec{x} = \vec{0}$ en une énergie dynamique de ses vrais modes de vibration autour de ses réelles configurations du vide, à savoir celles d'énergie absolument minimale. En fait, le potentiel possède alors un *continuum* de minima absolus, liés les uns aux autres par la symétrie de rotation du système. En d'autres termes, le système possède cette fois non plus un seul vide invariant sous la symétrie (ce qui était le cas en effet pour le point $\vec{x} = \vec{0}$ lorsque $\omega^2 > 0$), mais possède maintenant plutôt une infinité non dénombrable de vides—états d'énergie minimale—non invariants sous la symétrie de rotation mais transformés les uns dans les autres précisément par cette transformation.

En effet, lorsque $\omega^2 < 0$, les minima de l'énergie potentielle sont tous caractérisés par la valeur

$$|\vec{x}|_{\rm min} = \sqrt{-6\frac{\omega^2}{\lambda}} = \ell_0 \ . \tag{58}$$

Au voisinage d'un quelconque de ces minima, le système possède deux modes propres de vibration dans la limite des petites oscillations, l'un de fréquence non nulle dans la direction radiale dans le plan au point considéré, et l'autre de fréquence nulle le long du cercle associé aux minima de l'énergie potentielle.

Afin de rendre ces aspects plus explicites, introduisons une paramétrisation complexe des degrés de liberté du système en terme de la variable complexe[7]

$$z(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[x(t) + iy(t)\right] \ . \tag{59}$$

La fonction de Lagrange du système s'écrit alors

$$L = m|\dot{z}|^2 - m\omega^2|z|^2 - \frac{1}{6}m\lambda|z|^4 \ , \tag{60}$$

tandis que l'énergie potentielle totale du système

$$V = m\omega^2|z|^2 + \frac{1}{6}m\lambda|z|^4 \tag{61}$$

[7] Dans le contexte de la discussion du mécanisme de brisure de symétrie et du mécanisme de Higgs en théorie des champs, cette combinaison est habituelle désignée par $\phi(t,\vec{x})$, et correspond alors à un champ scalaire complexe invariant sous les transformations dans sa phase, le célèbre champ de Higgs.

possède son minimum pour les valeurs de z telles que

$$|z|_{\rm min}=\sqrt{-\frac{3\omega^2}{\lambda}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ell_0\quad ,\quad \frac{dV(z)}{d|z|}(|z|_{\rm min})=0\ , \tag{62}$$

avec alors

$$V(|z|_{\rm min})=-\frac{3}{2}\frac{m\omega^4}{\lambda}\ <\ 0=V(z=0)\ . \tag{63}$$

Notons que la symétrie du système sous les rotations dans le plan (x,y), ou dans le plan complexe z maintenant, se traduit simplement par des changements de phase de cette dernière variable,

$$z'(t)=e^{i\alpha}\,z(t)\ , \tag{64}$$

α étant une variable angulaire arbitraire, et indépendante du temps à ce stade.

Dans le but d'identifier maintenant les modes propres d'oscillation tout au moins dans la limite des petites oscillations, considérons les fluctuations au voisinage d'une quelconque de ces configurations d'énergie minimale associée à une valeur de la forme

$$z_{\rm min}=\frac{1}{\sqrt{2}}\,\ell_0\,e^{i\varphi_0}\ , \tag{65}$$

φ_0 étant une valeur angulaire quelconque spécifiant en quel point du cercle de rayon $\ell_0/\sqrt{2}$ on considère cette configuration du vide classique du système. Toute fluctuation au voisinage de cette configuration peut alors être paramétrée par la dépendance

$$z(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\rho(t)+\ell_0\right]\,e^{i\varphi_0}\,e^{i\frac{1}{\ell_0}\xi(t)}\ , \tag{66}$$

où $\rho(t)$ représente les fluctuations dans la direction radiale associée à ce choix de vide, tandis que $\xi(t)$ celle des fluctuations le long du cercle définissant les configurations des vides. Une simple substitution de cette paramétrisation dans la fonction de Lagrange du système conduit alors à l'expression suivante

$$L=\frac{1}{2}m\dot{\rho}^2+\frac{1}{2}m\left(1+\frac{\rho}{\ell_0}\right)^2\dot{\xi}^2-\frac{1}{2}m\left(-2\omega^2\right)\rho^2-\frac{1}{6}m\ell_0\lambda\rho^3-\frac{1}{24}m\lambda\rho^4+\frac{3}{2}\frac{m\omega^4}{\lambda}\ . \tag{67}$$

Pour ce qui est de la variable radiale $\rho(t)$, on constate donc que ses modes de fluctuations de petite amplitude sont harmoniques avec une fréquence angulaire carrée de $(-2\omega^2>0)$, correspondant à la courbure positive du potentiel dans la direction radiale au voisinage des configurations du vide. Cependant, les autres termes de degrés supérieurs en ρ apparaissant dans cette expression montrent que ce mode d'oscillation interagit avec lui-même ainsi que le mode $\xi(t)$ du système. Mais pour ce dernier, on constate par contre qu'aucun terme purement quadratique dans ce degré de liberté ne contribue à la fonction de Lagrange: aucune courbure parabolique n'existe dans l'énergie potentielle dans la direction angulaire ou circulaire du potentiel au voisinage des configurations du vide. Si ce n'était pour ses interactions avec le degré de liberté radial $\rho(t)$, le degré de liberté $\xi(t)$ serait celui d'une particule libre de masse m.

Dans cette paramétrisation des degrés de liberté développée au voisinage d'une des configurations possibles du vide du système (parmi une infinité), la symétrie sous les rotations dans le plan complexe n'est plus manifeste. En effet, la dynamique des deux degrés de liberté $\rho(t)$ et $\xi(t)$ est différente, et ce sont bien ceux-là qui, dans la limite des petites oscillations au voisinage du vide, sont découplés et définissent les "modes propres" (en perturbation) du système. La raison pour laquelle la symétrie du système n'est plus manifeste dans cette paramétrisation est en réalité que le vide du système, quant à lui, n'est pas invariant sous cette symétrie, quand bien même sa dynamique l'est. Dans une telle situation, on parle de "brisure spontanée de symétrie". La symétrie est exacte et parfaitement valable pour le système et sa dynamique, mais elle n'est plus rendue manifeste dans ses solutions car ses configurations d'énergie minimale ne sont pas invariantes sous la symétrie. En quelque sorte, l'existence de la symétrie a été rendue "cachée" de par la "brisure spontanée" associée au fait qu'une configuration quelconque d'énergie minimale n'est en aucun cas invariante sous la symétrie. Une situation analogue bien connue en physique est celle de la magnétisation spontanée d'un matériau magnétique sous la température de Curie: la direction dans laquelle se manifeste cette magnétisation est fixée, mais *a priori* peut être quelconque. La symétrie sous les rotations dans l'espace est brisée par la configuration du vide.

Cependant, la symétrie, bien que "cachée", est encore bien présente. Dans le modèle ci-dessus, elle se traduit par le fait que sous une transformation de phase constante α dans la variable dynamique $z(t)$, les degrés de liberté $\rho(t)$ et $\xi(t)$ se transforment en vertu des relations

$$\rho'(t) = \rho(t) \quad , \quad \xi'(t) = \xi(t) + \alpha \ . \tag{68}$$

Et en effet, c'est en raison de cette dernière transformation pour la variable dynamique angulaire $\xi(t)$ que celle-ci ne peut jamais contribuer à la fonction de Lagrange du système qu'au travers de ses dérivées temporelles, ce qui en particulier exclut tout terme en ξ^2 dans cette fonction. En d'autres termes, nécessairement la fréquence associée au mode de vibration $\xi(t)$ du système est identiquement nulle. La symétrie sous les rotations interdit une telle contribution, ou encore elle "protège" le terme de fréquence du mode de vibration angulaire du degré de liberté complexe $z(t)$. Dans le contexte de la théorie des champs, un tel mode est appelé un mode de Goldstone, terme qui peut parfaitement également s'appliquer ici au mode $\xi(t)$ de ce système simple.

5 Oscillateur Sphérique et Symétrie de Jauge

5.1 Symétrie locale de phase U(1)

L'oscillateur anharmonique discuté plus haut possède, quel que soit le signe de ω^2, une symétrie sous les rotations dans le plan d'angle constant. Peut-être est-ce audacieux, mais serait-il possible de construire à partir de celui-ci un système possédant encore cette symétrie mais d'une manière telle que maintenant le paramètre continu α définissant chacune de ces rotations[8] devienne lui-même une fonction du temps? Dans un tel cas, les degrés de liberté du système se transformeraient sous la forme

$$z'(t) = e^{i\alpha(t)}\, z(t) \ , \tag{69}$$

impliquant en particulier que la partie angulaire (la phase) du degré de liberté complexe n'a plus de signification physique car pouvant être à volonté absorbée dans une transformation de symétrie par un choix adéquat de la fonction angulaire $\alpha(t)$, et de ce fait éliminée entièrement de la dynamique du système!

En réalité, une telle symétrie rendue locale dans le temps est possible, et porte le nom générique de symétrie de jauge. L'exemple particulier considéré ici est le plus simple possible pour une symétrie de jauge de type Yang-Mills associée au groupe de Lie abélien compact U(1) des transformations de phase sur le cercle unité dans le plan complexe. Poursuivons quelques conséquences d'un tel choix avec le simple modèle dont nous disposons.

[8] L'ensemble des éléments du groupe des rotations étant ainsi paramétré par une variable continue, est l'exemple le plus simple d'un groupe de Lie. A toute symétrie continue est associé un groupe de Lie.

Quelques moments de réflexion concluent que si la symétrie locale ci-dessus est réalisée dans la fonction de Lagrange du système, dans le cas des termes cinétiques $|\dot{z}|^2$ il convient de modifier cette dérivée ordinaire par une dérivée dite covariante, car conduisant à une variable dérivée de $z(t)$ se transformant sous la symétrie de jauge de la même manière que $z(t)$, ou encore que $\dot{z}(t)$ dans le cas d'une symétrie globale (avec α indépendant du temps). Dans ce but, il est nécessaire d'introduire un autre degré de liberté réel $A(t)$, se transformant comme suit sous la symétrie de jauge

$$A'(t) = A(t) - \dot{\alpha}(t) \ , \tag{70}$$

et d'étendre la définition de la dérivée temporelle en la dérivée covariante temporelle

$$d_t z(t) = \dot{z}(t) \quad \rightarrow \quad D_t(t)z(t) = \dot{z} + iA(t)z(t) \ . \tag{71}$$

Il suit alors en effet sous la transformation de jauge

$$\left[\frac{d}{dt} + iA'(t)\right] z'(t) = D'_t(t)z'(t) = e^{i\alpha(t)}\, D_t(t)z(t) \ , \tag{72}$$

de sorte qu'il suffit de remplacer dans la fonction de Lagrange initiale la dérivée temporelle ordinaire par la dérivée temporelle covariante, et obtenir une nouvelle fonction de Lagrange parfaitement invariante même sous les transformations de phase $\alpha(t)$ locales dans le temps, à savoir avoir jaugé la symétrie sous les rotations dans le plan.

Pour des besoins ultérieurs, choisissons d'ajouter encore un autre degré de liberté réel $B(t)$ dans le système, de masse M, sans terme harmonique, mais qui se couple au degré de liberté initial $z(t)$ par des couplages harmoniques[9], et laissé invariant sous la symétrie locale de phase, $B'(t) = B(t)$.

Ainsi finalement, le système que nous considérons s'écrit

$$L = m\left|\left(\frac{d}{dt} + iA\right) z\right|^2 - m\omega^2|z|^2 - \frac{1}{6}m\lambda|z|^4 + \frac{1}{2}M\dot{B}^2 - Mg^2B^2|z|^2 \ , \tag{73}$$

avec g^2 un dernier paramètre réel caractérisant l'intensité de l'interaction entre les degrés de liberté $B(t)$ et $z(t)$.

Par construction, ce système est en effet invariant sous les transformations locales de phase dans la variable $z(t)$, à condition que le degré de liberté $A(t)$ se transforme également de la manière donnée ci-dessus. Notons que pour cette même raison de symétrie, il est exclu d'avoir un terme cinétique pour ce degré de liberté, de la forme $\dot{A}^2$, car en effet ce terme ne pourrait être invariant sous la symétrie de jauge. En d'autres mots, la symétrie de jauge "protège", ou en tout cas interdit toute dynamique pour le degré de liberté $A(t)$. Dans le cadre de la théorie des champs, ce constat correspond à ce que les champs de jauge sont nécessairement de masse nulle, ce qui est donc également le cas ici pour le mode $B(t)$ qui ne possède pas de terme de potentiel harmonique.

Notons également que la symétrie de jauge implique que le degré de liberté de phase de $z(t)$ n'est pas indépendant de $A(t)$. Sous transformations de jauge appropriées par un choix de $\alpha(t)$, il est en effet toujours possible d'absorber totalement l'un de ces degrés de liberté dans une redéfinition de l'autre. Ou encore, par un choix approprié de $\alpha(t)$, il est possible par exemple d'annuler complètement la variable $A(t)$ qui n'est donc pas physique, et c'est bien pour cela

[9]Dans le contexte de la théorie des champs, ce degré de liberté $B(t)$ correspond à l'une des composantes spatiales du champ vectoriel $A_\mu(t, \vec{x}\,)$ du champ de jauge, ici survivant sous la procédure de réduction dimensionnelle.

qu'elle ne peut possèder de dynamique. Ou à l'inverse, il est possible d'éliminer totalement la phase de $z(t)$ dans le degré $A(t)$, mais ce dernier n'étant pas dynamique, cela implique que la phase de $z(t)$ n'est en effet pas dynamique non plus.

En conclusion, cet exemple simple nous a permis de comprendre comment il est possible de manière relativement immédiate, de construire des systèmes invariants sous un groupe de symétrie continu dont les paramètres deviennent des fonctions locale du temps (et de l'espace dans le cas de théories de champs). Il suffit de remplacer les dérivées ordinaires par des dérivées covariantes, et ce faisant introduire des degrés de liberté dits de jauge additionnels se transformant également sous la symétrie. Précisément les mêmes structures mathématiques sont à l'oeuvre pour les théories de champ conduisant aux théories de Yang-Mills et même la relativité générale d'Einstein, donc en effet les théories modernes pour la description de toutes les interactions fondamentales entre toutes les particules élémentaires.

5.2 Brisure spontanée de symétrie et mécanisme de Higgs

Maintenant que nous avons pu construire un oscillateur sphérique invariant de jauge sous les rotations dans le plan locales dans le temps, voyons quelles sont les conséquences dans le cas d'une brisure spontanée de cette symétrie, à savoir lorsque la fréquence angulaire ω^2 du mode complexe $z(t)$ devient strictement négative, $\omega^2 < 0$ (situation donc associée à l'instabilité du point stationnaire $z(t) = 0$ de l'énergie potentielle de ce degré de liberté).

Tout comme dans la Sect.4.2, choisissons de travailler au voisinage d'un des vides (classiques) de la dynamique, en utilisant la paramétrisation suivante

$$z(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\rho(t) + \ell_0\right] \, e^{i\varphi_0} \, e^{i\frac{1}{\ell_0}\xi(t)} \ . \tag{74}$$

Cependant, tirons également parti de la symétrie de jauge cette fois, en appliquant à l'ensemble des degrés de liberté du système la transformation de jauge de paramètre $\alpha(t)$ donné par

$$\alpha(t) = -\frac{1}{\ell_0}\xi(t) \ , \tag{75}$$

et ceci quelle que soit la configuration de $\xi(t)$. Ce faisant, ce degré de liberté n'est plus présent dans la fonction de Lagrange du système, et donc dans sa dynamique. Nous obtenons en effet

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}mA'^2\left(\rho+\ell_0\right)^2 - \frac{1}{2}m\omega^2\left(\rho+\ell_0\right)^2 - \frac{1}{24}m\lambda\left(\rho+\ell_0\right)^4 + \frac{1}{2}M\dot{B}^2 - \frac{1}{2}Mg^2\left(\rho+\ell_0\right)^2 B^2 \ , \tag{76}$$

avec

$$A'(t) = A(t) - \dot{\alpha}(t) = A(t) + \frac{1}{\ell_0}\dot{\xi}(t) \ . \tag{77}$$

Par conséquent, en terme d'oscillations de petite amplitude, nous retrouvons le mode $\rho(t)$ de fréquence angulaire carrée $(-2\omega^2 > 0)$, tandis que le mode de Goldstone $\xi(t)$ n'apparaît plus, mais est présent dans $A'(t)$. Cependant, nous constatons que le degré de liberté $B(t)$ qui initialement ne possède pas de terme harmonique et est donc de fréquence nulle, par ce mécanisme de brisure spontanée de la symétrie de jauge, a maintenant acquis un tel terme, conduisant à une fréquence angulaire non nulle de ses fluctuations donnée par

$$\omega_B = |g|\ell_0 \ . \tag{78}$$

Puisque $z(t)$ possède une valeur non nulle dans le vide, et puisque le couplage d'interaction g entre B et z n'est pas nul, il suit qu'un terme de fréquence harmonique pour $B(t)$ est engendré par ce mécanisme de brisure de symétrie de jauge. Ceci est précisément le mécanisme de Higgs, lorsque transposé dans le cadre d'une théorie de jauge impliquant des champs définis dans l'espace-temps.

Notons également que $A'(t)$ intervient directement comme seul autre degré de liberté. Cependant, il ne possède pas de dynamique, et son équation du mouvement, obtenue par le principe variationnel, conduit à la condition

$$mA'(t)\left(\rho(t)+\ell_0\right)^2=0\ . \tag{79}$$

Une telle situation est également caractéristique des théories de jauge: en raison des symétries, il apparaît des contraintes entre les degrés de liberté, exprimant en réalité leur invariance de jauge. Dans le cas particulier du modèle simplifié à l'extrême construit ici sur base de l'oscillateur harmonique sphérique dans le plan, cette contrainte est telle que soit nous avons $A'(t)=0$, soit $\rho(t)=-\ell_0$. Choisissant de poser $A'(t)=0$, il suit que la dynamique invariante de jauge de ce système est celle de la fonction de Lagrange suivante

$$L=\frac{1}{2}m\dot{\rho}^2-\frac{1}{2}m\omega^2\left(\rho+\ell_0\right)^2-\frac{1}{24}m\lambda\left(\rho+\ell_0\right)^4+\frac{1}{2}M\dot{B}^2-\frac{1}{2}Mg^2\left(\rho+\ell_0\right)^2B^2\ . \tag{80}$$

Il suit donc qu'il ne subsiste que le mode radial $\rho(t)$ ainsi que le mode $B(t)$ possédant tous deux maintenant une fréquence angulaire non nulle et définie positive. Par ailleurs, ces deux modes propres de vibrations de petites amplitudes interagissent l'un avec l'autre au travers des termes autres que purement harmoniques apparaissant dans l'énergie potentielle totale du système. Lorsque étendu dans le contexte de la théorie des champs, le mode radial $\rho(t)$ correspond alors au champ de Higgs dont les quanta correspondent au boson scalaire de Higgs, de spin 0 et de masse encore inconnue expérimentalement par mesure directe. Tandis que $B(t)$ correspond alors au champ de jauge devenu massif (par exemple les $W^\pm$ ou le Z_0), ayant ainsi acquis un terme de masse au travers du mécanisme de Higgs de brisure spontanée de la symétrie de jauge.

6 Champs et Particules Quantiques Relativistes

Ce petit exercice de vouloir modéliser la dynamique d'un champ ondulatoire, tel le champ électromagnétique, au travers du modèle d'oscillateurs harmoniques, nous a donc mené déjà un long chemin dans cette exploration du monde des particules élementaires, quantiques et relativistes, et de leurs interactions.

Nous avons compris qu'en raison de l'invariance sous les translations dans le temps, l'énergie des états quantiques d'un système est bien définie et est une constante du mouvement prenant des valeurs conservées et quantifiées. Dans le cas de mouvements périodiques et harmoniques dans le temps, ces quanta possèdent tous une énergie identique caractérisée par la fréquence angulaire de l'oscillateur, dont nous avons calculé le spectre.

Afin d'étendre cela à des particules, il faut encore pouvoir parler de leur quantité de mouvement $\vec{p}$, tandis que dans un cadre relativiste leurs énergie et quantité de mouvement sont liées par la relation

$$E^2-(\vec{p}c)^2=\left(mc^2\right)^2\ , \tag{81}$$

m étant la masse de ces particules. Mais qui dit quantité de mouvement, dit espace, et si cette quantité de mouvement doit aussi constituer une grandeur conservée—ce qui est le cas pour des particules libres—il est nécessaire d'énoncer une dynamique invariante sous les translations dans l'espace également. Tandis que l'invariance sous les transformations de Lorentz nécessite que les variations temporelles et spatiales des degrés de liberté soient traitées sur un même pied, et combinées à l'aide de la métrique de Minkowski.

Aussi par extension, nous sommes amenés à considérer des degrés de liberté associés à chaque point de l'espace et du temps, $\phi(t,\vec{x}\,)$, dont le terme cinétique de dérivée temporelle doit être accompagné d'un terme semblable impliquant les dérivées spatiales. Et finalement, afin que le système puisse posséder des modes d'oscillation il est nécessaire d'inclure un terme de potentiel harmonique en $\phi^2(t,\vec{x}\,)$ dans la fonction de Lagrange, dont nous connaissons bien le spectre. Aussi un choix tel que le suivant s'impose pour l'action d'un tel système, au moins dans le cas le plus simple d'un seul champ scalaire réel, comme l'était initialement l'oscillateur harmonique à une dimension[10] $x(t)$,

$$S[\phi] = \int dt \int d^3\vec{x} \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial(ct)}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\vec{x}}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{1}{\kappa^2}\phi^2 \right] . \tag{82}$$

Dans cette expression, $\kappa > 0$ désigne un paramètre possédant la dimension physique d'une longueur, car les deux premiers types de termes dans la densité Lagrangienne font intervenir une telle dimension au travers des dérivées spatio-temporelles. Par comparaison avec l'oscillateur harmonique, c'est donc le paramètre c/κ qui remplace le rôle joué par la fréquence angulaire ω. Cependant dans ce contexte, ce paramètre est directement lié à la masse des modes d'oscillations du champ, à savoir ses quanta. En effet, puisqu'il y a invariance sous les translations spatiales, il existe des solutions de quantité de mouvement constante qui sont de la forme[11]

$$\phi(t,\vec{x}\,) = \phi(t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} , \tag{83}$$

où le vecteur d'onde $\vec{k}$ est lié à la quantité de mouvement des quanta par la relation[12] $\vec{k} = \vec{p}/\hbar$. Substituant ce mode de vibration spatiale dans l'action ci-dessus afin d'identifier la dynamique temporelle du degré de liberté $\phi(t)$, il suit immédiatement qu'en effet les états quantiques, analogues à ceux d'un oscillateur harmonique maintenant, sont ceux de quanta possédant tous la même énergie, fonction de la quantité de mouvement $\vec{p}$, et donnée par la relation

$$E^2(\vec{p}\,) = (\vec{p}c)^2 + \left(mc^2\right)^2 \tag{84}$$

avec pour valeur de leur masse invariante relativiste

$$mc^2 = \frac{\hbar c}{\kappa} . \tag{85}$$

Ainsi d'emblée le terme harmonique en ϕ^2 dans la densité Lagrangienne de la dynamique du champ ϕ détermine sa masse: ce qui était la fréquence angulaire pour l'oscillateur harmonique devient la masse des quanta du champ! La correspondance ne saurait être plus simple et transparente! Et par conséquent, toutes les considérations développées dans les sections précédentes sur base d'oscillateurs harmoniques s'étendent de suite en termes des quanta, c'est-à-dire, des particules quantiques relativistes associées à un champ quantique relativiste.

[10] L'intégrale $\int d^3\vec{x}$ dans cette action correspond à une somme sur l'ensemble des degrés de liberté $\phi_{\vec{x}}(t) = \phi(t,\vec{x}\,)$ du système.

[11] Ecrite sous cette forme, cette solution en onde plane dans l'espace aux équations du mouvement n'est pas réelle. Pour obtenir des configurations réelles pour le champ $\phi(t,\vec{x}\,)$, il suffit de combiner les divers modes propres de même vecteur d'onde mais de dépendances temporelles différentes, obtenus en cherchant le spectre complet des modes normaux du système. Ceci est discuté dans d'autres notes mises à disposition pour ces cycles d'exposés.

[12] Pour s'en convaincre, il suffit d'appliquer l'opérateur $\hat{\vec{p}} = -i\hbar\partial/\partial\vec{x}$ à ces ondes planes.

Choisissant de travailler dans des unités telles que $\hbar = 1 = c$, la dynamique quantique relativiste d'un champ ondulatoire dont les quanta possèdent une masse m est donc basée sur une action de la forme

$$S[\phi] = \int dt \int d^3\vec{x} \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\vec{x}}\right)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \right] . \quad (86)$$

Cette action constitue donc le point de départ de toute discussion de théories quantiques des champs comme description de particules quantiques relativistes de masse connue, nulle ou non. Et en suivant les mêmes démarches que celles des pages précédentes, il est possible d'obtenir les théories de Yang-Mills modernes, et le mécanisme de brisure spontanée de Higgs conférant leurs masses à toutes les particules connues.

7 Conclusions

Comme annoncé dans l'Avant-Propos, l'objectif de ces quelques pages a été de tracer, à l'instar d'une boussole sur une carte, le chemin d'exploration à suivre sur la route vers le Modèle Standard des interactions fondamentales et des particules élémentaires. Les concepts intervenant dans la construction de ce modèle comme théorie quantique de champs relativistes possédant des symétries de jauge locales dans l'espace-temps de Minkowski, ont été réduits ici à leur plus simple expression. Utilisant alors les résultats essentiellement immédiats de l'oscillateur harmonique, il est possible d'établir déjà un grand nombre de considérations, parfois avec quelques arguments de "bon sens physique", qui s'étendent au théories des champs tout en maintenant déjà leur signification physique fondamentale.

Il est donc espéré que ces quelques pages puissent encore être utiles dans les deux prochaines années de ce cycle, en guise de boussole sur cette carte d'exploration, lorsque parfois il arrivera que l'on ait un peu "perdu le nord". Le fil rouge de la démarche conceptuelle est tiré ici sur cette carte, tandis que le plaisir de la découverte des fleurs et des feuillages riches et colorés, et des divers "animaux" vivant sur les arbres et dans ces territoires à explorer maintenant, vous est totalement laissé ouvert au travers d'un travail personnel et en profondeur avec le soutien des exposés à venir.